

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA  
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

**IMPLEMENTAÇÃO DA FORMULAÇÃO EM  
COMPLEXO PARA PROBLEMAS LINEARES  
E SENOIDAIS NO SISTEMA FEECAD**

DISSERTAÇÃO SUBMETIDA À UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA  
CATARINA PARA A OBTENÇÃO DO GRAU DE MESTRE EM  
ENGENHARIA ELÉTRICA

**MAURICIO PETRY**

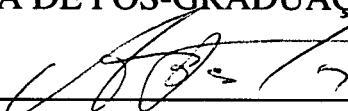
Florianópolis, Dezembro de 1996

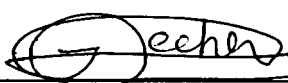
**IMPLEMENTAÇÃO DA FORMULAÇÃO EM  
COMPLEXO PARA PROBLEMAS LINEARES  
E SENOIDAIS NO SISTEMA FEECAD**

**MAURICIO PETRY**

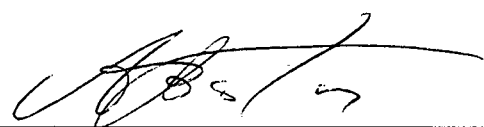
**ESTA DISSERTAÇÃO FOI JULGADA ADEQUADA PARA  
OBTENÇÃO DO TÍTULO DE MESTRE EM ENGENHARIA**

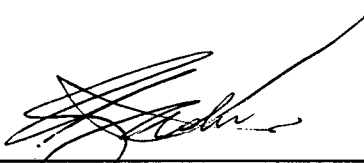
**ESPECIALIDADE ENGENHARIA ELÉTRICA, CONCEPÇÃO E ANÁLISE  
DE DISPOSITIVO ELETROMAGNÉTICOS, E APROVADA EM SUA  
FORMA FINAL PELO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO.**

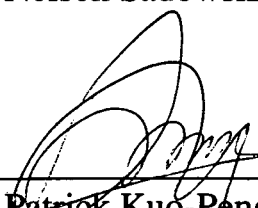
  
\_\_\_\_\_  
Prof. João Pedro Assumpção Bastos, Dr. d'Etat  
Orientador

  
\_\_\_\_\_  
p.p. Prof. Adroaldo Raizer, Dr. INPG  
Coordenador do Curso de Pós-Graduação  
em Engenharia Elétrica

**BANCA EXAMINADORA**

  
\_\_\_\_\_  
Prof. João Pedro Assumpção Bastos, Dr. d'Etat

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Nelson Sadowski, Dr. INPT

  
\_\_\_\_\_  
Prof. Patrick Kuo-Peng, Dr. INPT

Aos meus pais Osmar e Maria e  
aos meus irmãos Rosana, Rosângela, Roselva e Marcelo

**À minha futura esposa**  
**Janaina Athayde**

## **AGRADECIMENTOS**

Ao Professor João Pedro Assumpção Bastos, pelos compreensão, amizade e dedicação a orientação desta Dissertação e pelo incentivo prestados para que eu continuasse nesta caminhada.

À minha família, em especial aos meus pais e por tudo que Eles significam para mim.

À Janaina Athayde, pela ajuda e incentivo sempre constantes na minha vida.

Aos Professores e aos amigos do GRUCAD pelo convívio e pela ajuda prestado nos momentos difíceis, principalmente aos mestrandos Iverton Concentino de Lima, Marcia Aguiar e Roberto Meza Cubilla.

Ao Professor Renato Mesquita Cardoso pela ajuda e colaboração dada a este trabalho.

Aos demais membros da banca examinadora, Professores Nelson Sadowski e Patrick Kuo-Peng.

Ao coordenador do Departamento de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica Adroaldo Raizer, e ao chefe da Seção de Expediente Wilson Silva da Costa, pela colaboração durante o curso.

Ao CNPq pelo suporte financeiro através da bolsa de estudo.

À Deus, pelos momentos difíceis ter me ajudado durante este trabalho.

## **RESUMO**

Neste trabalho apresenta-se a implementação computacional em 3D do método de elementos finitos de aresta hexaédricos com formulação utilizando o potencial vetor magnético para problemas de correntes induzidas em regime linear e senoidal. Este software foi implementado no ambiente FEECAD (Finite Edge Element Computer Aided Design).

Inicialmente estudam-se alguns conceitos básicos de eletromagnetismo e o equacionamento utilizando os elementos de aresta hexaédricos em 3D. Em seguida apresenta-se a formulação do potencial vetor magnético complexo, bem como o cálculo da força magnética.

Finalmente, realizam-se as comparações e aplicações para a validação do método. Compara-se um eletroímã no sistema FEECAD 3D com o mesmo eletroímã no sistema EFCAD-2D. Compara-se também, para um contator, os valores obtidos pelo cálculo com os obtidos por medidas, que são fornecidos pelo fabricante do dispositivo analisado.

## **ABSTRACT**

This work is related to a 3D implementation using the Finite Edge Element method. The hexahedric element method is applied to eddy current problem in steady sinusoidal state by means of a complex formulation. This software was implemented in the environment FEECAD (Finite Edge Element Computer Aided Design).

Firstly some basic concepts of Electromagnetism are presented and the formulation by hexahedric edge element em 3D is applied to the physical problem. Afterwards, it is presented the complex magnetic vector potential formulation, and the application of the Maxwell stress tensor to this case.

Finally, comparison involving the new program, other computational systems and measurements are presented in order to validate the method.

## **SUMÁRIO**

<b>RESUMO</b>	<b>VI</b>
---------------	-----------

<b>ABSTRACT</b>	<b>VII</b>
-----------------	------------

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>X</b>
-------------------	----------

### **CAPÍTULO I. - Formulação Para Análise de Dispositivos Eletromagnéticos Utilizando Potencial Vetor Magnético**

1.1 - Introdução	12
1.2 - Equações Fundamentais de Maxwell	12
1.3 - Formulação Para Problemas magnetostáticos	15
1.4 - Equacionamento Para Potencial Vetor Complexo	18
1.5 - Conclusão	19

### **CAPÍTULO II. - Elementos de Aresta Utilizando Elementos Hexaédricos**

2.1 - Introdução	20
2.2 - Elementos de Aresta Hexaédricos	22
2.3 - Direções das Arestas no Elemento de Referência	25
2.4 - Conclusão	34



### **CAPÍTULO III. - Equacionamento Do Potencial Vetor Magnético Complexo Para Dispositivos 3D Utilizando Elementos De Aresta**

3.1 - Introdução	35
3.2 - Formulação Forte	35
3.3 - A Forma Fraca	40
3.4 - O Método de Galerkin	43
3.5 - O Método de Elementos Finitos	44
3.6 - Cálculo da Força em 3D Para Problemas de Correntes Induzidas em Formulação Complexa Utilizando o Tensor de Maxwell	46
3.7 - Conclusão	53

### **CAPÍTULO IV - Comparações e Aplicações**

4.1 - Introdução	54
4.2 - Comparação das Forças Entre Feecc com Efcad-2D	54
4.3 - Contator Magnético	58
4.3.1 - Cálculo Analítico	60
4.3.2 - Resultados do Programa Feecc	61
4.4 - Conclusão	64

<b>CONCLUSÃO GERAL</b>	<b>66</b>
------------------------	-----------

<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>67</b>
-----------------------------------	-----------

## INTRODUÇÃO

A análise eletromagnética de dispositivos elétricos, tais como máquinas elétricas, transformadores, contadores, eletroímãs, etc., é realizada através da resolução das equações de Maxwell. Estas equações estabelecem o comportamento do campo eletromagnético em todo domínio geométrico dos dispositivos.

No desenvolvimento dos problemas tridimensionais, o cálculo de campos eletromagnéticos é amplamente usado nas formulações que utilizam potenciais escalares (elementos nodais). Quando a atenção foi voltada para problemas vetoriais, a aproximação natural foi tratar simplesmente os campos vetoriais  $\mathbf{H}$  como sendo três campos escalares acoplados  $H_x$ ,  $H_y$  e  $H_z$ . Entretanto, os vetores têm uma identidade física e matemática que vão além de sua representação em forma de alguma coordenada particular. Dividindo o vetor em três componentes cartesianas, dificuldades são causadas por elementos nodais. Por exemplo, condições de contorno em eletromagnetismo muitas vezes tomam a forma de uma especificação de uma única parte do campo vetorial que é tangente ao contorno. Com elementos nodais, esta física deve ser transformada em relações lineares entre as componentes de contorno do nó, com direção média tangencial. Assim o modelamento do campo eletromagnético se torna artificial [Webb, 1992]. Teríamos também problemas de erros de cancelamento em regiões de alta permeabilidade ou dificuldades no caso de regiões multiplamente conectadas [Mesquita, 1990].

Estes problemas não aparecem quando o potencial vetor magnético é utilizado. Como veremos neste trabalho, existem vantagens em utiliza-lo em problemas 3D. No entanto, neste caso existem penalidades sob o ponto de vista computacional pois temos a presença de três incógnitas por nó, em geral e a necessidade de se utilizar um calibre [Ida&Bastos, 1992].

Neste trabalho, utilizaremos o método de elementos finitos adaptado a um tipo de elemento relativamente novo, chamado de “Elemento de Aresta”.

Objetivo deste trabalho é fazer uma implementação computacional em 3D do método de elementos finitos de aresta (hexaédricos) com formulação em complexo utilizando o potencial vetor magnético. Após a implementação em complexo poderemos observar graficamente o efeito da penetração dos campos eletromagnéticos, a indução magnética pontual e as forças magnéticas, e sobretudo, resolver de forma simples, problemas de correntes induzidas em regime linear e senoidal, onde este software será acoplado ao sistema FEECAD(Finite Edge Element Computer Aided Design) desenvolvido no GRUCAD/EEL/CTC/UFSC.

No capítulo I, apresentam-se alguns conceitos básicos associados ao eletromagnetismo pelo método de elementos finitos com a utilização do potencial vetor magnético em formulação complexa.

No capítulo II, apresenta-se o desenvolvimento das equações utilizando os elementos de aresta hexaédricos.

No capítulo III, apresenta-se a equação a ser resolvida pelo método de elementos finitos de aresta, sua aplicação ao método de Galerkin e será discutido as condições de contorno para o problema magnetostático complexo, bem como o cálculo da força magnética.

No capítulo IV, apresenta-se alguns exemplos e aplicações utilizando-se um eletroímã e contator, o qual comprova a validação deste trabalho.

# **CAPÍTULO I**

## **FORMULAÇÃO PARA ANÁLISE DE DISPOSITIVOS**

## **ELETROMAGNÉTICOS UTILIZANDO POTENCIAL VETOR**

## **MAGNÉTICO**

### **1.1 - INTRODUÇÃO**

Neste capítulo, apresentam-se as equações de Maxwell, a formulação do potencial vetor magnético e o equacionamento do potencial vetor em complexo, para o qual utilizam-se os elementos finitos de aresta em soluções de problemas magnéticos em termos de frequência.

### **1.2 - EQUAÇÕES FUNDAMENTAIS DE MAXWELL**

As quatro grandezas vetoriais que dependem da posição espacial e do tempo e que caracterizam um campo magnético, são:

**E** - Campo Elétrico (V/m)

**H** - Campo Magnético (A/m)

**B** - Indução Magnética (T)

**D** - Indução Elétrica (C/m<sup>2</sup>)

Estes fenômenos eletromagnéticos são regidos pela interdependência entre as quatro grandezas vetoriais, que são:

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (1.1)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (1.2)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (1.3)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (1.4)$$

onde:

$t$  - Tempo (s);

$\mathbf{J}$  - Densidade superficial de corrente elétrica ( $A/m^2$ );

$\rho$  - Densidade volumétrica de carga elétrica ( $C/m^3$ ).

Outras relações existentes entre os vetores de campo são acrescentadas às equações de Maxwell. As relações adicionais, denominadas relações constitutivas, dependem do meio onde existe o campo eletromagnético. Se essas propriedades constitutivas em cada ponto (permeabilidade, permissividade e condutividade) são contínuas, assumem-se que os vetores  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{B}$  e  $\mathbf{D}$  sejam finitos e possuam funções contínuas com derivadas contínuas. As discontinuidades ocorrem nas fronteiras entre os meios[Mesquita, 1991], essas propriedades são:

$$\mathbf{D} = \|\epsilon\| \mathbf{E} \quad (1.5)$$

$$\mathbf{B} = \|\mu\| \mathbf{H} + \mathbf{B}_r \quad (1.6)$$

$$\mathbf{J} = \|\sigma\| \mathbf{E} \quad (1.7)$$

onde:

$\|\epsilon\|$  - Tensor de permissividade elétrica do meio (F/m);

$\|\mu\|$  - Tensor de permeabilidade magnética do meio (H/m);

$\|\sigma\|$  - Tensor de condutividade elétrica do meio ( $1/\Omega.m$ );

$\mathbf{B}_r$  - Indução magnética remanente (T).

A indução magnética remanente é acrescentada para que os ímãs permanentes possam ser tratados, caso estes existam no domínio.

No caso em que os meios são isotrópicos, os tensores  $\|\epsilon\|$ ,  $\|\mu\|$  e  $\|\sigma\|$  se reduzem aos escalares  $\epsilon$ ,  $\mu$  e  $\sigma$  nas equações (1.5), (1.6) e (1.7).

Quando se trabalha em regime estático, não há variação temporal das grandezas envolvidas; assim, as equações que tratam dos problemas magnetostáticos se tornam :

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (1.8)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (1.9)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (1.10)$$

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (1.11)$$

A partir da equação(1.8) pode-se escrever a equação da continuidade elétrica, o que significa que a corrente de condução elétrica é conservativa:

$$\text{div } \mathbf{J} = 0 \quad (1.12)$$

Na interface entre dois meios com propriedades constitutivas diferentes, verificam-se as condições sobre o campo, onde os índices 1 e 2 representam os dois meios adjacentes:

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_1 = \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_2 \quad (1.13)$$

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_2 \quad (1.14)$$

$$\mathbf{n} \bullet \mathbf{B}_1 = \mathbf{n} \bullet \mathbf{B}_2 \quad (1.15)$$

$$\mathbf{n} \bullet \mathbf{J}_1 = \mathbf{n} \bullet \mathbf{J}_2 \quad (1.16)$$

$$\mathbf{n} \bullet \mathbf{D}_1 = \mathbf{n} \bullet \mathbf{D}_2 \quad (1.17)$$

Para as relações (1.13) e (1.17) sejam verdadeiras,  $\mathbf{J}$  e  $\rho$  tem que ser igual a zero na fronteira,  $\mathbf{n}$  representa o vetor normal unitário à superfície entre os dois meios.

As equações (1.13) e (1.15) estabelecem a continuidade da componente tangencial do campo magnético e a continuidade da componente normal da indução magnética. As equações (1.14) e (1.16) estabelecem a continuidade da componente tangencial do campo elétrico e a continuidade da componente normal da densidade de corrente elétrica, as quais são contínuas entre os dois meios com propriedades diferentes.

### 1.3 - FORMULAÇÃO PARA PROBLEMAS MAGNETOSTÁTICOS

A partir da equação (1.3), pode-se definir um potencial vetor magnético  $\mathbf{A}$  da seguinte maneira:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} \quad (1.18)$$

onde :

$\mathbf{A}$  - Potencial vetor magnético

Substituindo-se a equação (1.18) em (1.1), temos:

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \text{rot } \mathbf{A} &= 0 \\ \text{rot} \left( \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (1.19)$$

A partir da equação (1.19), podemos definir:

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad } \phi \quad (1.20)$$

Na formulação utilizada neste trabalho, consideraremos que  $\mathbf{E}$  é gerado somente pela variação temporal de  $\mathbf{B}$ , assim, a equação (1.20) torna-se

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.20a)$$

Substituindo (1.20a) em (1.7), para materiais isotrópicos, temos:

$$\mathbf{J}_e = -\sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (1.21)$$

A equação (1.21) representa as correntes induzidas geradas pela variação do potencial vetor magnético.

Definindo  $\mathbf{J}_s$ , como a densidade de corrente gerada pela fonte em  $A/m^2$  e  $\mathbf{J}_e$  como a densidade de corrente gerada pelo potencial vetor magnético, temos a densidade de corrente total:

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_s + \mathbf{J}_e \quad (1.22)$$

Fazendo a combinação das equações (1.8), (1.6), (1.22), (1.18), (1.21), obtemos a equação da magnetostática:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{1}{\mu} \\ \text{rot}(\mathbf{v} \text{rot} \mathbf{A}) &= \mathbf{J}_s - \sigma \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \text{rot}(\mathbf{v} \mathbf{B}_r) \end{aligned} \quad (1.23)$$



A equação (1.23) é relativa ao potencial vetor magnético nas regiões onde há materiais magnéticos condutivos, ímãs permanentes e fontes. Caso na região não existam ímãs, considera-se  $\mathbf{B}_r = 0$ .

Conforme a figura 1.1, para resolver uma equação diferencial (1.23) de problema de contorno, há necessidade de se estabelecer os dois tipos de condições de contorno na fronteira  $\Gamma$  do domínio  $\Omega$  [Becker et. al., 1981, Zienkiewicz&Morgan, 1983, Mesquita, 1990]:

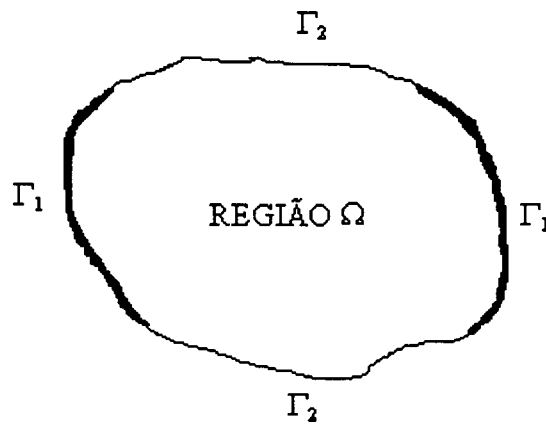


Figura 1.1 - Representação esquemático de um domínio de estudo

1) Condição de contorno de Dirichlet, potencial é imposto:

$$\mathbf{A} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{a} \wedge \mathbf{n} \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (1.24)$$

onde:  $\mathbf{a}$  é um vetor arbitrário.

2) Condição de contorno de Neumann

$$\mathbf{v} (\text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{B}_r) \wedge \mathbf{n} = \mathbf{h} \wedge \mathbf{n} \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (1.25)$$

onde:  $\mathbf{h}$  é um vetor arbitrário. Normalmente  $\mathbf{h} = 0$ , para uma condição de contorno de Neumann homogênea.

No capítulo III abordaremos todas as condições de contorno envolvidas para os problemas magnetostático usando o potencial vetor magnético.

#### 1.4 - EQUACIONAMENTO PARA POTENCIAL VETOR COMPLEXO

Para a formulação complexa a excitação deve ser senoidal com materiais lineares ou com valores relativamente baixos de  $\mathbf{J}_s$  a ponto de não saturar a estrutura quando os materiais forem não lineares. Assim, poderemos utilizar o potencial vetor magnético complexo para a solução dos problemas de correntes induzidas em estado permanente, o que possibilita o uso da formulação complexa.  $\mathbf{A}$  é dado pela expressão complexa de Euler (com  $j = \sqrt{-1}$ ):

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^* e^{j\alpha} \quad (1.26)$$

com

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{A} e^{j\alpha} \quad (1.27)$$

onde  $\alpha$  é ângulo de fase do vetor  $\mathbf{A}$ , nós temos

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = j\omega \mathbf{A}^* e^{j\alpha} \quad (1.28)$$

Sendo uma alimentação cossenoidal de pulsação  $\omega$ , temos:

$$\mathbf{J}_s(t) = \mathbf{J}_s \cos(\omega t + \beta) \quad (1.29)$$

isto é:

$$\mathbf{J}_s = \mathbf{J}_s^* e^{j\alpha} \quad (1.30)$$

sendo

$$\mathbf{J}_s^* = \mathbf{J}_s e^{j\beta} \quad (1.31)$$

onde  $\beta$  é o ângulo de fase de  $\mathbf{J}_s$

Substituindo as equações (1.28) e (1.30) na equação (1.23) e considerando que na fronteira em complexo  $\mathbf{B}_r=0$  necessariamente, temos:

$$\text{rot} \nabla \text{rot} \mathbf{A}^* e^{j\omega t} + j\sigma\omega \mathbf{A}^* e^{j\omega t} - \mathbf{J}_s^* e^{j\omega t} = 0 \quad (1.32)$$

Admitindo que os vetores  $\mathbf{A}^*$  e  $\mathbf{J}_s^*$  possuem a mesma frequência, podemos simplificar os termo  $e^{j\omega t}$  da equação (1.32). Assim, a resposta do sistema para a excitação senoidal em regime permanente é:

$$\text{rot} \nabla \text{rot} \mathbf{A}^* + j\sigma\omega \mathbf{A}^* - \mathbf{J}_s^* = 0 \quad (1.33)$$

Onde:

$$\omega = 2.\pi.f$$

$\omega$  - Velocidade angular;

$f$  - frequência de excitação dada em Hertz

A equação(1.33) será implementada no ambiente do software FEECAD, para o cálculo de problemas com excitação senoidal e a obtenção das correntes induzidas. O nome deste programa é Feecc (Finite Edge Element Complex Current), o qual é o objetivo deste trabalho para simulação dos efeitos destes fenômenos em dispositivos eletromagnéticos.

## 1.5 - CONCLUSÃO

Neste capítulo, foram apresentados as equações e conceitos fundamentais dos campos eletromagnéticos e a formulação do potencial vetor complexo  $\mathbf{A}^*$  para a aplicação destas equações no método de elementos finitos utilizando elementos de aresta, o qual será discutido no capítulo III.

## **CAPÍTULO II**

### **ELEMENTOS DE ARESTA UTILIZANDO**

### **ELEMENTOS HEXAÉDRICOS**

#### **2.1 - INTRODUÇÃO**

Os elementos de aresta são baseados em elementos finitos para o cálculo de campos vetoriais, cujos graus de liberdade são associados as arestas dos elementos (Hexaédricos), em vez de ser associado aos nós do elemento, como é usualmente utilizado em elementos nodais.

Dois tipos de elementos finitos são empregados para efetuar os cálculos em 3D; elementos nodais e aresta. Observemos que existem muitas dificuldades e compromissos envolvendo o cálculo em 3D. Citaremos algumas destas :

- ⇒ O número de incógnitas pode variar de uma para quatro por nó da malha, dependendo da formulação;
- ⇒ Muitas vezes, mais que uma formulação é usada no mesmo problema, cada formulação é aplicada numa parte diferente do domínio físico. Estas formulações devem ser acopladas apropriadamente;
- ⇒ Existem aplicações de calibres para melhorar a condição do sistema matricial (o qual é normalmente mal condicionado). A aplicação destes calibres permitem uma convergência mais rápida da solução iterativa do sistema de equações, mas também afeta a precisão dos resultados.
- ⇒ O método ICCG é o mais usado para solução destes sistemas de equações. Este é um método iterativo e divergência pode ocorrer, dependendo do problema e/ou da condição do sistema de equações.

Estas características e dificuldades naturais são a motivação para a extensiva atividade de pesquisa nesta área, resultando em uma variedade de formulações, as quais, proporcionam excelentes resultados em muitas aplicações práticas.

Elementos nodais são construídos para calcular as quantidades escalares nos nós dos elementos finitos. Isto é verdadeiro sempre quando são usadas as quantidades vetoriais, tal como, potencial vetor magnético. Na formulação 2D, se calcula a magnitude do potencial vetor nos nós dos elementos finitos, assim preservando a natureza escalar da solução (no caso do potencial vetor magnético, uma componente simples do potencial, usualmente a componente  $z$ , é suficiente para descrever o problema). Portanto, elementos nodais são perfeitamente adaptados para cálculo das quantidades escalares. Nos cálculos 3D, no entanto, para usar elemento nodal com variáveis vetor, é necessário separar o vetor em componentes e aplicar os elementos nodais nas mesmas, assim produzindo desvantagens quanto ao seu emprego para representar os campos elétricos e magnéticos, como: soluções não-física ou modos espúrios (a razão de ocorrer estas soluções é normalmente associada à falta de condição de divergência), dificuldade no tratamento de aresta e cantos condutores e dielétricos devido à singularidade dos campos associados a esta estrutura; dificuldades para introduzir nós múltiplos na interface entre os meios diferentes; a necessidade da aplicação de um calibre, para assegurar a unicidade dos problemas.

O uso de elementos de aresta em campos eletromagnético computacionais ocorreram no início dos anos de 1980. De fato, exigiu um modo de pensamento diferente, com a relutância natural da parte daqueles que já estão trabalhando com elementos nodais. Lentamente, elementos de aresta vêm ganhando aceitação e tornando-se amplamente usados.

Elementos de aresta são definidos como “Elementos Vetoriais”. As funções de forma desses elementos representam quantidades vetoriais e portanto eles podem ser naturalmente acoplados às equações vetoriais em um modo muito simples e direto, desde que o próprio vetor magnético seja a incógnita. Os elementos de aresta possuem mais algumas vantagens sobre o elemento nodal, como:

- ⇒ Permitem a descontinuidade da componente normal do vetor de um elemento para outro;
- ⇒ Manipulam melhor as singularidades do campo;
- ⇒ Eliminam os modos espúrios; é um dos principais fatores de sua aceitação é as aplicações em alta frequência, permitindo soluções das frequências sem os modos espúrios, um problema que aflige todas as soluções baseadas em elementos nodais.
- ⇒ Aplicação de condições de contorno usuais;
- ⇒ Alocação de memória econômica;
- ⇒ Não precisa de calibres. Pela experiência e resultados a utilização de calibres não é necessária para problemas magnetostáticos.

Neste capítulo, nós discutiremos as formulações dos elementos de aresta usando o elemento hexaédrico. As funções de forma destes elementos são descritas e a formulação é aplicada as configurações físicas. Nota-se aqui que o uso de tal elemento é bem adaptado à geometria simples mas, se a geometria é complicada ou tem muitas concavidades, há dificuldade para descrever a geometria em termos de elementos hexaédricos.

## **2.2 - ELEMENTOS DE ARESTA HEXAÉDRICOS**

Os elementos de aresta possuem um grau de liberdade por aresta, correspondem portanto aos elementos de 1<sup>o</sup> ordem de Whitney [Bossavit, 1988]; os graus de liberdade são baseados em arestas e as funções de base vetoriais são interpretadas como a circulação de  $\mathbf{A}$  ao longo das arestas paralelas aos eixos cartesianos da malha. A aproximação do potencial vetor magnético no interior de um elemento de aresta se dá através da seguinte expressão vetorial:

$$\mathbf{A} = \sum_{i=1}^{N_{\text{edg}}} \mathbf{w}_i(\mathbf{r}) \mathbf{A}_i \quad (2.1)$$

onde:

⇒  $\mathbf{A}_i$  - representa a circulação do potencial vetor sobre a aresta  $i$ , de modo que seu valor é constante por toda a aresta, para o elemento de 1ª ordem;

⇒  $\mathbf{w}_i$  - A função de forma sobre a aresta  $i$ , que é constante, e sua projeção é nula sobre as outras arestas do elemento;

⇒  $N_{\text{edg}}$  - é o número de arestas do elemento.

O elemento de aresta hexaédrico tem 6 faces, 8 nós e 12 arestas como mostra a figura 2.1a e 2.1b, portanto  $N_{\text{edg}} = 12$ .

A integração de linha da componente tangencial de  $\mathbf{w}_i$  sobre a  $i$ -ésima aresta tem que ser igual a 1 e 0 sobre todas as outras [Dular, 1993]. Estas características do elemento de aresta garantem a continuidade da componente tangencial do potencial ao longo da aresta e permitem o salto da componente normal [Webb, 1993].

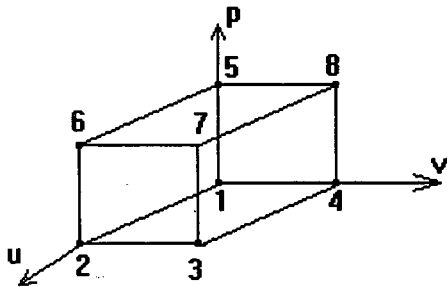


Figura 2.1a - Número dos nós

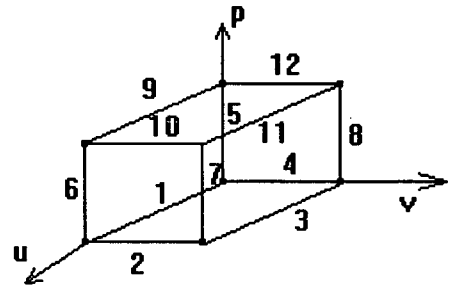


Figura 2.1b - Número das arestas

A função de forma  $\mathbf{w}_i$  é descrita pela seguinte expressão [Bastos, 1995]:

$$\mathbf{w}_i(\mathbf{r}) = \phi_i(u, v, p) \mathbf{q}_i(\mathbf{r}) \quad (2.2)$$

onde:

$$\mathbf{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad (2.3)$$

A equação (2.3) representa a posição do vetor em um ponto genérico  $M(x,y,z)$ .

$\phi_i(u,v,p)$  - é a função de deslocamento do elemento de aresta, que depende das coordenadas de referência  $(u,v,p)$  desde que a integração numérica e outras operações algébricas sejam realizadas neste sistema de coordenadas;

$q_i(\mathbf{r})$  - é a direção da aresta  $i$  em coordenadas reais, desde que as mesmas considerem a geometria real dos elementos de modo que a direção será dada por  $\nabla u$ ,  $\nabla v$  e  $\nabla p$ ; por exemplo, a direção é  $\nabla u$  desde que a aresta seja paralela a direção  $u$ .

A tabela 2.1 apresenta a função  $\phi_i(u,v,p)$ , suas derivadas parciais em relação a  $u$ ,  $v$  e  $p$ , para o elemento de referência hexaédrico com as doze arestas.

Considerando um plano paralelo a  $Opu$ , como na figura 2.2, com  $v$  constante, o  $\text{grad } u$  nos indica a direção dos  $u$  crescentes e é perpendicular ao plano  $Opv$ . Tomando como exemplo a aresta 11, temos:

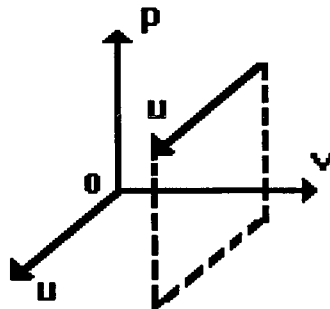


Figura 2.2 - Direção da aresta com  $v$  constante

$$w_{ii} = \phi_{11} \cdot \text{grad } u = \phi_{11} \cdot \nabla u$$



Aresta i	$\phi_i$	$\frac{\partial \phi_i}{\partial u}$	$\frac{\partial \phi_i}{\partial v}$	$\frac{\partial \phi_i}{\partial p}$	$q_i(\mathbf{r})$
1	$(1-v)(1-p)$	0	$p-1$	$v-1$	$\nabla_u$
2	$u(1-p)$	$1-p$	0	$-u$	$\nabla_v$
3	$v(1-p)$	0	$1-p$	$-v$	$\nabla_u$
4	$(1-u)(1-p)$	$p-1$	0	$u-1$	$\nabla_v$
5	$(1-u)(1-v)$	$v-1$	$u-1$	0	$\nabla_p$
6	$u(1-v)$	$1-v$	$-u$	0	$\nabla_p$
7	$uv$	$v$	$u$	0	$\nabla_p$
8	$(1-u)v$	$-v$	$1-u$	0	$\nabla_p$
9	$p(1-v)$	0	$-p$	$1-v$	$\nabla_u$
10	$pu$	$p$	0	$u$	$\nabla_v$
11	$p v$	0	$p$	$v$	$\nabla_u$
12	$p(1-u)$	$-p$	0	$1-u$	$\nabla_v$

Tabela 2.1 - Funções de forma  $\phi_i$  e suas derivadas para elementos hexaédricos

### 2.3 - DIREÇÕES DAS ARESTAS NO ELEMENTO DE REFERÊNCIA

Quando se apresentou as direções das arestas no elemento de referência, apareceram os termos  $\nabla_u$ ,  $\nabla_v$  e  $\nabla_p$ . Temos que de algum modo representá-los através do sistema de coordenadas real. Para isto define-se os vetores:

$$\mathbf{V}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \quad (2.4a)$$

$$\mathbf{V}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \quad (2.4b)$$

$$\mathbf{V}_p = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial p} = \frac{\partial}{\partial p} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \quad (2.4c)$$

$\mathbf{V}_u$ ,  $\mathbf{V}_v$  e  $\mathbf{V}_p$  pode ser escrito como:

$$\mathbf{V}_u = \frac{\partial x}{\partial u} \bar{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial u} \bar{\mathbf{j}} + \frac{\partial z}{\partial u} \bar{\mathbf{k}} \Rightarrow \mathbf{V}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial u} \end{bmatrix} \quad (2.5a)$$

$$\mathbf{V}_v = \frac{\partial x}{\partial v} \bar{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial v} \bar{\mathbf{j}} + \frac{\partial z}{\partial v} \bar{\mathbf{k}} \Rightarrow \mathbf{V}_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \quad (2.5b)$$

$$\mathbf{V}_p = \frac{\partial x}{\partial p} \bar{\mathbf{i}} + \frac{\partial y}{\partial p} \bar{\mathbf{j}} + \frac{\partial z}{\partial p} \bar{\mathbf{k}} \Rightarrow \mathbf{V}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} \\ \frac{\partial y}{\partial p} \\ \frac{\partial z}{\partial p} \end{bmatrix} \quad (2.5c)$$

Através das equações vetoriais (2.5a), (2.5b) e (2.5c), pode-se construir a seguinte matriz :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_u & \mathbf{V}_v & \mathbf{V}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial p} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial p} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial p} \end{bmatrix}$$

Fazendo a matriz transposta, nós obtemos a matriz  $[\mathbf{J}_1]$ :

$$[\mathbf{J}_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial p} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

Esta é a matriz Jacobiana  $J_1$ , que permite expressar um vetor no sistema de coordenadas Oxyz no sistema de coordenadas Ouvp.

Trabalhando-se com o vetor gradiente  $\nabla u$ , e estendendo-se para os outros gradientes  $\nabla v$  e  $\nabla p$ , pode-se colocá-lo da seguinte forma:

$$\nabla u = \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) u \Rightarrow \nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.7a)$$

$$\nabla v = \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) v \Rightarrow \nabla v = \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.7b)$$

$$\nabla p = \left( \frac{\partial}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial}{\partial z} \bar{k} \right) p \Rightarrow \nabla p = \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (2.7c)$$

A partir das equações (2.7a), (2.7b) e (2.7c), podemos construir a seguinte matriz:

$$[\nabla u \quad \nabla v \quad \nabla p] = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial p}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial p}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial p}{\partial z} \end{bmatrix} = [J_2] \quad (2.8)$$

A matriz Jacobiana  $\mathbf{J}_2$  converte um vetor no sistema de coordenadas Oupv para o sistema de coordenadas Oxyz.

Através deste conjunto de equações, tendo-se um vetor no sistema de coordenadas Oxyz e multiplicando-se pelo Jacobiano  $\mathbf{J}_1$ , obtemos um vetor no sistema de coordenadas Oupv. A conversão de volta para o sistema de coordenadas Oxyz é obtida multiplicando o vetor resultante, sistema Oupv, pela matriz Jacobiano  $\mathbf{J}_2$ . Assim, temos a seguinte propriedade do produto  $\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2$ :

$$\mathbf{J}_1 \cdot \mathbf{J}_2 \equiv [\mathbf{I}] \quad (2.9)$$

Com  $[\mathbf{I}]$  denotando a matriz identidade:

$$\mathbf{J}_1 = [\mathbf{V}_u \quad \mathbf{V}_v \quad \mathbf{V}_p]^T$$

$$\mathbf{J}_2 = [\nabla u \quad \nabla v \quad \nabla p]$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_u \\ \mathbf{V}_v \\ \mathbf{V}_p \end{bmatrix} [\nabla u \quad \nabla v \quad \nabla p] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{V}_u \nabla u & \mathbf{V}_u \nabla v & \mathbf{V}_u \nabla p \\ \mathbf{V}_v \nabla u & \mathbf{V}_v \nabla v & \mathbf{V}_v \nabla p \\ \mathbf{V}_p \nabla u & \mathbf{V}_p \nabla v & \mathbf{V}_p \nabla p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Verificando a 1ª coluna da equação (2.11) indica que  $\nabla u$  é perpendicular a  $\mathbf{V}_v$  e  $\mathbf{V}_p$  pois de  $\nabla u \mathbf{V}_v = 0$  e  $\nabla u \mathbf{V}_p = 0$ , portanto podemos escrever:

$$\nabla u = k(\mathbf{V}_v \wedge \mathbf{V}_p) \quad (2.12)$$

onde  $k$  é um escalar(número constante). Usando o 1º termo da coluna temos:

$$\nabla u \mathbf{V}_u = 1$$

e

$$k \mathbf{V}_u (\mathbf{V}_v \wedge \mathbf{V}_p) = 1$$

Isto pode ser escrito por:

$$k = \frac{1}{\text{vol}} \quad (2.13)$$

O produto misto de  $\mathbf{V}_u (\mathbf{V}_v \wedge \mathbf{V}_p)$  é igual ao volume(vol) do elemento. Usando as equações (2.12) e (2.13), nós obtemos:

$$\nabla u = \frac{\mathbf{V}_v \wedge \mathbf{V}_p}{\text{Vol}} \quad \nabla v = \frac{\mathbf{V}_p \wedge \mathbf{V}_u}{\text{Vol}} \quad \nabla p = \frac{\mathbf{V}_u \wedge \mathbf{V}_v}{\text{Vol}} \quad (2.14)$$

A partir das equações (2.12) a (2.14), calcularemos os vetores  $\mathbf{V}_u$ ,  $\mathbf{V}_v$  e  $\mathbf{V}_p$ .

Como o desenvolvimento do equacionamento se baseia no uso do elemento de referência, pode-se representar o vetor  $\mathbf{r}$  da equação (2.3) por funções de transformação geométrica de elementos finitos nodais [Dhatt & Touzot, 1985]. Para um elemento hexaédrico com oito nós, temos:

$$x = \sum_{i=1}^8 N_i x_i \quad y = \sum_{i=1}^8 N_i y_i \quad z = \sum_{i=1}^8 N_i z_i \quad (2.15)$$

Onde:

$N_i$  representa as funções de transformação geométricas tabeladas[Dhatt & Touzot, 1985], bem como sua derivadas;

$x_i$ ,  $y_i$  e  $z_i$  representa as coordenadas dos nós do hexaédro no sistema real.

Substituindo (2.15) em (2.5a), temos:

$$\mathbf{V}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \vec{i} & \frac{\partial y}{\partial u} \vec{j} & \frac{\partial z}{\partial u} \vec{k} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial N}{\partial u} x \vec{i} & \frac{\partial N}{\partial u} y \vec{j} & \frac{\partial N}{\partial u} z \vec{k} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_u = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial u} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_8 \end{bmatrix} \vec{i} + \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial u} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_8 \end{bmatrix} \vec{j} + \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial u} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_2 \end{bmatrix} \vec{k} \quad (2.16a)$$

De modo análogo são obtidos para  $\mathbf{V}_v$  e  $\mathbf{V}_p$

$$\mathbf{V}_v = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial v} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_8 \end{bmatrix} \vec{i} + \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial v} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_8 \end{bmatrix} \vec{j} + \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial v} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_2 \end{bmatrix} \vec{k} \quad (2.16b)$$

$$\mathbf{V}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial p} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_8 \end{bmatrix} \vec{i} + \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial p} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_8 \end{bmatrix} \vec{j} + \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial p} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ \dots \\ z_2 \end{bmatrix} \vec{k} \quad (2.16c)$$

Alguns comentários podem ser feitos neste ponto:

Os vetores  $V_u$ ,  $V_v$  e  $V_p$  são obtidos das coordenadas dos oito nós do elemento e as relações estão na tabela 2.2

$\nabla u$ ,  $\nabla v$  e  $\nabla p$  são calculado das equações (2.14);

Com as 12 funções  $\phi_i$  (tabela 2.1) nós obtemos as 12 funções de forma vetoriais como:

$$w_i = \phi_i \nabla u \quad (\text{para } i=1,3,9,11) \quad (2.17a)$$

$$w_i = \phi_i \nabla v \quad (\text{para } i=2,4,10,12)$$

(2.17b)

$$w_i = \phi_i \nabla p \quad (\text{para } i=5,6,7,8) \quad (2.17c)$$

Tabela 2.2 - Funções de Transformações Geométricas

Nó	[N]	$[\partial N / \partial u]$	$[\partial N / \partial v]$	$[\partial N / \partial p]$
1	$a_2 b_2 c_2 / 8$	$-b_2 c_2 / 8$	$-a_2 c_2 / 8$	$-a_2 b_2 / 8$
2	$a_1 b_2 c_2 / 8$	$b_2 c_2 / 8$	$-a_1 c_2 / 8$	$-a_1 b_2 / 8$
3	$a_1 b_1 c_2 / 8$	$b_1 c_2 / 8$	$a_1 c_2 / 8$	$-a_1 b_1 / 8$
4	$a_2 b_1 c_2 / 8$	$-b_1 c_2 / 8$	$a_2 c_2 / 8$	$-a_2 b_1 / 8$
5	$a_2 b_2 c_1 / 8$	$-b_2 c_1 / 8$	$-a_2 c_1 / 8$	$a_2 b_2 / 8$
6	$a_1 b_2 c_1 / 8$	$b_2 c_1 / 8$	$-a_1 c_1 / 8$	$a_1 b_2 / 8$
7	$a_1 b_1 c_1 / 8$	$b_1 c_1 / 8$	$a_1 c_1 / 8$	$a_1 b_1 / 8$
8	$a_2 b_1 c_1 / 8$	$-b_1 c_1 / 8$	$a_2 c_1 / 8$	$a_2 b_1 / 8$

onde:  $a_1=1+u$ ;  $a_2=1-u$ ;  $b_1=1+v$ ;  $b_2=1-v$ ;  $c_1=1+p$ ;  $c_2=1-p$

No entanto, para a aplicação de aresta nas equações de Maxwell, vamos precisar do  $(\nabla \wedge w_i)$  que são obtidas como abaixo:

$$\nabla \wedge \mathbf{w}_i = \nabla \wedge (\phi_i \mathbf{q}_i) \quad (2.18)$$

Por exemplo, para aresta 11, temos:

$$\nabla \wedge (\phi_{11} \nabla \mathbf{u}) = \phi_{11} \nabla \wedge \nabla \mathbf{u} + \nabla \phi_{11} \wedge \nabla \mathbf{u}$$

Portanto, para as aresta paralelas a aresta 11, temos:

$$\nabla \wedge \mathbf{w}_{11} = \nabla \phi_{11} \wedge \nabla \mathbf{u} \quad (2.19)$$

De maneira similar é obtido para as outras arestas dos elementos. Agora nós avaliamos a expressão para  $\nabla$ , e precisando calcular  $\nabla \phi$ , temos

$$\nabla = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} & \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial z} & \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix} = [\nabla \mathbf{u} \quad \nabla \mathbf{v} \quad \nabla \mathbf{p}] \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \\ \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \end{bmatrix} \quad (2.20)$$

Notando por exemplo, que  $\nabla \mathbf{u} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \bar{\mathbf{i}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \bar{\mathbf{j}} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \bar{\mathbf{k}}$ , então:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \nabla \mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \nabla \mathbf{v} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \nabla \mathbf{p} \quad (2.21)$$

Assim, substituindo as equação (2.21) em (2.19), temos:

$$\nabla \wedge \mathbf{w}_{11} = \left( \frac{\partial \phi_{11}}{\partial \mathbf{u}} \nabla \mathbf{u} + \frac{\partial \phi_{11}}{\partial \mathbf{v}} \nabla \mathbf{v} + \frac{\partial \phi_{11}}{\partial \mathbf{p}} \nabla \mathbf{p} \right) \wedge \nabla \mathbf{u}$$

$$\nabla \wedge \mathbf{w}_{11} = -\frac{\partial \phi_{11}}{\partial \mathbf{v}} (\nabla \mathbf{u} \wedge \nabla \mathbf{v}) + \frac{\partial \phi_{11}}{\partial \mathbf{p}} (\nabla \mathbf{p} \wedge \nabla \mathbf{u}) \quad (2.22)$$



Usando as equações (2.14), o produto vetorial  $\nabla_u \wedge \nabla_v$ , temos

$$\nabla_u \wedge \nabla_v = (\mathbf{V}_v \wedge \mathbf{V}_p) \wedge (\mathbf{V}_p \wedge \mathbf{V}_u) / \text{vol}^2$$

Para os vetores  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  e  $\mathbf{c}$ , a seguinte relação é válida:

$$\mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

e denotando  $\mathbf{a} = \mathbf{V}_v \wedge \mathbf{V}_p$ ,  $\mathbf{b} = \mathbf{V}_p$ ,  $\mathbf{c} = \mathbf{V}_u$ , nós obtemos:

$$\nabla_u \wedge \nabla_v = \left\{ \mathbf{V}_p [(\mathbf{V}_v \wedge \mathbf{V}_p) \cdot \mathbf{V}_u] - \mathbf{V}_u [(\mathbf{V}_v \wedge \mathbf{V}_p) \cdot \mathbf{V}_p] \right\} / \text{vol}^2$$

Fazendo os produtos escalares e vetoriais da expressão acima, temos:

$$\nabla_u \wedge \nabla_v = \frac{\mathbf{V}_p}{\text{Vol}} \quad (2.23a)$$

Similarmente

$$\nabla_v \wedge \nabla_p = \frac{\mathbf{V}_u}{\text{Vol}} \quad (2.23b)$$

e

$$\nabla_p \wedge \nabla_u = \frac{\mathbf{V}_v}{\text{Vol}} \quad (2.23c)$$

Substituindo as expressões (2.22) na equação (2.21), temos:

$$\nabla \wedge \mathbf{w}_{11} = \left( \frac{\partial \phi_{11}}{\partial p} \mathbf{V}_v - \frac{\partial \phi_{11}}{\partial v} \mathbf{V}_p \right) \frac{1}{\text{Vol}}$$

Generalizando estas expressões para todas as arestas:

Para as arestas paralelas a u:

$$\nabla \wedge \mathbf{w}_i = \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial p} \mathbf{V}_v - \frac{\partial \phi_i}{\partial v} \mathbf{V}_p \right) \frac{1}{\text{Vol}} \quad (\text{para as arestas } 1,3,9,11) \quad (2.24a)$$

Para as arestas paralelas a v:

$$\nabla \wedge \mathbf{w}_i = \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial u} \mathbf{V}_p - \frac{\partial \phi_i}{\partial p} \mathbf{V}_u \right) \frac{1}{\text{Vol}} \quad (\text{para as arestas } 2,4,10,12) \quad (2.24b)$$

Para as arestas paralelas a p:

$$\nabla \wedge \mathbf{w}_i = \left( \frac{\partial \phi_i}{\partial v} \mathbf{V}_u - \frac{\partial \phi_i}{\partial u} \mathbf{V}_v \right) \frac{1}{\text{Vol}} \quad (\text{para as arestas } 5,6,7,8) \quad (2.24c)$$

Estas expressões são obtidas facilmente, pois advém dos vetores  $\mathbf{V}_u$ ,  $\mathbf{V}_v$  e  $\mathbf{V}_p$  calculadas pelas tabela 2.1.

## 2.4 - CONCLUSÃO

Neste capítulo foram apresentados as equações e o desenvolvimento dos elementos de aresta hexaédricos, os quais serão usados para discretizar o domínio de estudo onde se aplica a formulação do potencial vetor magnético.

## **CAPÍTULO III**

### **EQUACIONAMENTO DO POTENCIAL VETOR MAGNÉTICO**

### **COMPLEXO PARA DISPOSITIVOS 3D UTILIZANDO**

### **ELEMENTOS DE ARESTA**

#### **3.1. INTRODUÇÃO**

Neste capítulo será apresentada a modelagem matemática para o problema de potencial vetor magnético complexo usando o método de elementos de aresta, bem como a formulação forte, a formulação fraca e a discretização do domínio pelo método de elementos finitos de aresta. Em seguida será apresentada a metodologia para o cálculo da força magnética.

#### **3.2. FORMULAÇÃO FORTE**

O tratamento clássico das equações diferenciais exige que a solução satisfaça a equação em todos os pontos do domínio, observando a existência de materiais com propriedade diferentes que causa a descontinuidade nas interfaces entre os meios.

Reformula-se então, o problema de forma a admitir condições mais fracas para a solução e sua derivadas [Becker et al., 1981; Mesquita, 1991].

O comportamento do potencial vetor complexo foi apresentado através da expressão (1.33), a qual representa a formulação forte e a equação a ser resolvida. Rescrevendo a equação (1.33), temos:

$$\text{rot} \nabla \text{rot} \mathbf{A}^* + j\sigma\omega \mathbf{A}^* - \mathbf{J}_s^* = 0 \quad (3.1)$$

A partir das condições de continuidade dos vetores de campo, apresentado no capítulo I, as equações (1.13), (1.14), (1.15) e (1.16), devem ser satisfeitas para a validação do problema proposto.

Rescrevendo estas equações temos:

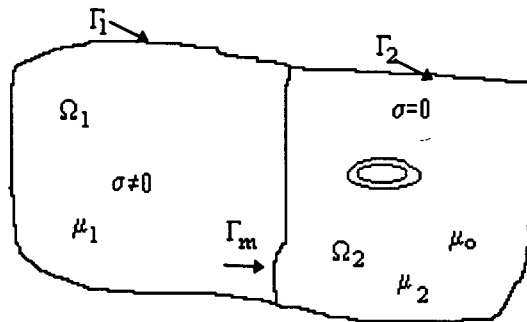
$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_1 = \mathbf{n} \wedge \mathbf{H}_2 \quad (3.2)$$

$$\mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_1 = \mathbf{n} \wedge \mathbf{E}_2 \quad (3.3)$$

$$\mathbf{n} \bullet \mathbf{B}_1 = \mathbf{n} \bullet \mathbf{B}_2 \quad (3.4)$$

$$\mathbf{n} \bullet \mathbf{J}_1 = \mathbf{n} \bullet \mathbf{J}_2 \quad (3.5)$$

Seja o domínio de estudo representado pela figura 3.1:



**Figura 3.1** - Representação esquemático do domínio de estudo

onde:

- 1) Região condutora  $\Omega_1$ , onde são induzidas as correntes de Foucault;
- 2) Região  $\Omega_2$ , onde são impostas as correntes externas e que possuem materiais com a permeabilidade igual a do ar e condutividade elétrica nula.

O domínio completo do problema é igual a união dos sub-domínios  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ . A fronteira do domínio  $\Omega$  é  $\Gamma$  e é dividida em duas partes de acordo com as condições de contorno impostas. Em  $\Gamma_1$ , a componente normal da indução é imposta; em  $\Gamma_2$ , são

impostas as componentes tangenciais de  $\mathbf{H}$ . Geralmente estas condições de contorno são homogêneas[ Mesquita, 1990]

$$\mathbf{n} \bullet \mathbf{B} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_1 \quad (3.6)$$

$$\mathbf{H} \wedge \mathbf{n} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_2. \quad (3.7)$$

Dentro de cada sub-região  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , têm-se  $\mu_1$  e  $\mu_2$  contínuos; uma descontinuidade de  $\mu$  ocorre na interface  $\Gamma_m$  entre os dois meios. Caso o potencial vetor magnético  $\mathbf{A}$  seja contínuo, as condições de interface entre os meios são automaticamente satisfeitas. Logo, as condições de interface, conforme as equações (3.2) e (3.4) geram as seguintes condições:

$$\mathbf{n} \cdot [\nabla \wedge \mathbf{A}^*] = 0 \quad (3.8)$$

$$\mathbf{n} \wedge [\nu (\nabla \wedge \mathbf{A}^*)] = 0 \quad (3.9)$$

A equação (3.8) implica na continuidade da componente normal do rot  $\mathbf{A}^*$ , na interface entre os dois meios de permeabilidade magnética diferentes. A equação (3.9) implica na continuidade da componente tangencial do rot  $\mathbf{A}^*$ . Portanto, o potencial vetor magnético  $\mathbf{A}^*$  é contínuo e satisfaz estas restrições.

Na região  $\Omega_1$ , onde há materiais condutores:

$$\nabla \wedge (\nu \nabla \wedge \mathbf{A}^*) = -j\sigma\omega\mathbf{A}^* \quad , \text{ em } \Omega_1. \quad (3.10)$$

Na região  $\Omega_2$ , onde há correntes externas:

$$\nabla \wedge (\nu \nabla \wedge \mathbf{A}^*) = \mathbf{J}_s^* \quad , \text{ em } \Omega_2 \quad (3.11)$$

Na interface de descontinuidade de  $\sigma$ , temos:

$$\mathbf{n} \cdot [-j\sigma\omega\mathbf{A}^*] = 0 \quad (3.12)$$

Sabendo-se que a condutividade elétrica é nula em  $\Omega_2$ , a componente normal da corrente induzida  $\mathbf{J}_s^*$  é nula na interface  $\Gamma_m$ , ou seja, não há corrente saindo da região  $\Omega_1$ .

Nesta formulação não é utilizado nenhum tipo de calibre, como por exemplo, o calibre de Coulomb [Biró&Preis,1989, Rodger et al., 1990], ou calibre de Lorentz [Bryant et al., 1990]. Portanto na fronteira de  $\Omega(\Omega_1 \cup \Omega_2)$ , temos a seguintes condições de contorno:

1) condições de contorno de Dirichlet em  $\Gamma_1$ :

$$\mathbf{A}^* \wedge \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_1 \quad (3.13)$$

2) condições de contorno de Neumann em  $\Gamma_2$ :

$$\mathbf{v} (\nabla \wedge \mathbf{A}^*) \wedge \mathbf{n} = 0 \quad \text{em } \Gamma_2 \quad (3.14)$$

Resumindo, temos a seguinte formulação forte para o problema de correntes induzidas em 3D, utilizando o potencial vetor complexo:

Determinar  $\mathbf{A}^*$  que satisfaça:

1) A equação diferencial parcial nos pontos internos a região  $\Omega_1(\mu, \sigma \neq 0)$ :

$$\nabla \wedge (\mathbf{v} \nabla \wedge \mathbf{A}^*) = -j\sigma\omega\mathbf{A}^* \quad , \text{ em } \Omega_1 \quad (3.15)$$

2) A equação diferencial parcial nos pontos internos de  $\Omega_2(\mu_0, \sigma = 0)$ :

$$\nabla \wedge (\nu \nabla \wedge \mathbf{A}^*) = \mathbf{J}_s^* \quad , \text{ em } \Omega_2 \quad (3.16)$$

3) As condições de salto na interface em pontos de descontinuidade de  $\mu$ :

$$\mathbf{n} \wedge [\nu (\nabla \wedge \mathbf{A}^*)] = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_m \quad (3.17)$$

4) A condição de interface em  $\Gamma_m$  nos pontos de descontinuidade de  $\sigma$ :

$$\mathbf{n} \cdot [-j\sigma\omega\mathbf{A}^*] = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_m \quad (3.18)$$

5) As condições de contorno de Dirichlet em  $\Gamma_1$ :

$$\mathbf{A}^* \wedge \mathbf{n} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_1 \quad (3.19)$$

6) As condições de contorno de Neumann em  $\Gamma_2$ :

$$\nu (\nabla \wedge \mathbf{A}^*) \wedge \mathbf{n} = 0 \quad , \text{ em } \Gamma_2 \quad (3.20)$$

Com as equações diferenciais e as condições de contorno temos o potencial vetor magnético complexo descritos nestas equações.

### 3.3 - A FORMA FRACA

Através da formulação forte, busca-se encontrar uma formulação fraca para a resolução dos problemas potencial vetor magnético complexo, equações (3.15) a (3.20). A forma fraca diminui as restrições impostas pelo tratamento clássico das equações diferenciais.

Portanto, admitindo as condições mais fracas para a solução e suas derivadas. Uma solução para a formulação fraca também é solução para formulação forte [Oden&Reddy, 1981; Mesquita, 1990].

A formulação fraca para o problema descrito pode ser obtido a partir da formulação forte de modo que  $\mathbf{A}^*$  das equações diferenciais sejam satisfeitas em um sentido de médias ponderadas com as condições de contorno homogêneas. Para isto define-se os seguintes resíduos:

$$\mathbf{r}_1 = \nabla \wedge (\nu \nabla \wedge \mathbf{A}^*) + j\sigma\omega\mathbf{A}^* = 0, \quad \text{em } \Omega_1 \quad (3.21)$$

$$\mathbf{r}_2 = \nabla \wedge (\nu \nabla \wedge \mathbf{A}^*) - \mathbf{J}_s^* = 0, \quad \text{em } \Omega_2 \quad (3.22)$$

Estes resíduos são definidos no interior de cada subdomínio regular de  $\Omega_p$ ,  $p=1$  e  $2$ , e no intervalo de tempo  $0 \leq t \leq t_f$ , sendo  $t_f$  o instante final de tempo. O produto escalar dos resíduos é efetuado com funções de teste vetoriais  $\gamma_n$ , suficientemente regulares e independentes de  $t$ . Assim, aplicando o método de resíduos ponderados, temos:

$$\int_{\Omega} \mathbf{R} \gamma_n d\Omega = 0 \quad (3.23)$$

Onde:

$\mathbf{R}$  - o resíduo;

$\gamma_n$  - é a função de teste.

Substituindo a equação (3.23) nas equações (3.21) e (3.22), temos:



$$\int_{\Omega_1} \gamma_1 \cdot (\nabla \wedge (v \nabla \wedge A^*) + j\sigma\omega A^*) d\Omega = 0 \quad , \text{ em } \Omega_1 \quad (3.24)$$

$$\int_{\Omega_2} \gamma_2 \cdot (\nabla \wedge (v \nabla \wedge A^*) - J_s^*) d\Omega = 0 \quad , \text{ em } \Omega_2 \quad (3.25)$$

Utilizando-se a identidade vetorial [Spiegel, 1969]:

$$Q(\nabla \wedge P) = P(\nabla \wedge Q) - \nabla(P \wedge Q) \quad (3.26)$$

Onde:

$$P = v (\nabla \wedge A^*)$$

$$Q = \gamma_n$$

Substituindo a equação (3.26) nas equações (3.24) e (3.25), temos:

$$\int_{\Omega_1} v (\nabla \wedge A^*) (\nabla \wedge \gamma_1) d\Omega - \int_{\Omega_1} \nabla (v \nabla \wedge A^* \wedge \gamma_1) d\Omega + \int_{\Omega_1} j\sigma\omega A^* \gamma_1 d\Omega = 0 \quad (3.27)$$

$$\int_{\Omega_2} v (\nabla \wedge A^*) (\nabla \wedge \gamma_2) d\Omega - \int_{\Omega_2} \nabla (v \nabla \wedge A^* \wedge \gamma_2) d\Omega - \int_{\Omega_2} J_s^* \gamma_2 d\Omega = 0 \quad (3.28)$$

Aplicando o teorema da divergência, nas equações (3.27) a (3.28), obtemos:

$$\int_{\Omega_1} v (\nabla \wedge A^*) (\nabla \wedge \gamma_1) d\Omega - \int_{\partial\Omega_1} \gamma_1 (n_1 \wedge v (\nabla \wedge A^*)) d\Gamma + \int_{\Omega_1} j\sigma\omega A^* \gamma_1 d\Omega = 0 \quad (3.29)$$

$$\int_{\Omega_2} v (\nabla \wedge A^*) (\nabla \wedge \gamma_2) d\Omega - \int_{\partial\Omega_2} \gamma_2 (n_2 \wedge v (\nabla \wedge A^*)) d\Gamma - \int_{\Omega_2} J_s^* \gamma_2 d\Omega = 0 \quad (3.30)$$

Para se chegar até estas expressões, considerou-se a continuidade dos componentes nos pontos de interface entre as várias regiões ( Equações 3.2 - 3.5).

Assim, as equações são válidas sobre todo o domínio de  $\Omega_p$ ,  $p = 1, 2$  e não apenas sobre cada domínio regular. Desta maneira,  $\partial\Omega_p$  é definida por:

$$\begin{aligned} \partial\Omega_p &= U\Gamma_{jp} \\ j &= 1, 2, \quad p = 1, 2 \\ j &\neq p \end{aligned} \quad (3.31)$$

Somando-se as contribuições, equações (3.29) e (3.30), dos sub-domínios  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$ , obtém-se:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \wedge \mathbf{A}^*)(\nabla \wedge \gamma) - \int_{\partial\Omega_1} \gamma_1(\mathbf{n}_1 \wedge \nu (\nabla \wedge \mathbf{A}^*))d\Gamma - \int_{\partial\Omega_2} \gamma_2(\mathbf{n}_2 \wedge \nu (\nabla \wedge \mathbf{A}^*))d\Gamma \\ + \int_{\Omega} j\sigma\omega\mathbf{A}^*\gamma d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{J}_s^*\gamma d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.32)$$

As fronteiras  $\partial\Omega_1$  e  $\partial\Omega_2$  são compostas de duas parcelas: uma que coincide com a interface  $\Gamma_m$  denotada  $\partial\Omega_1-\Gamma_m$  e  $\partial\Omega_2-\Gamma_m$  e outra que coincide com  $\Gamma_m$ .

Decompondo-se as integrais referentes a  $\partial\Omega_1$  e  $\partial\Omega_2$  da equações (3.32) nas duas parcelas acima, obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\nabla \wedge \mathbf{A}^*)(\nabla \wedge \gamma) d\Omega - \int_{\Gamma_m} \gamma_1(\mathbf{n}_1 \wedge \nu (\nabla \wedge \mathbf{A}^*))d\Gamma \\ - \int_{\partial\Omega_1-\Gamma_m} \gamma_1(\mathbf{n}_1 \wedge \nu (\nabla \wedge \mathbf{A}^*))d\Gamma - \int_{\Gamma_m} \gamma_2(\mathbf{n}_2 \wedge \nu (\nabla \wedge \mathbf{A}^*))d\Gamma \\ - \int_{\partial\Omega_2-\Gamma_m} \gamma_2(\mathbf{n}_2 \wedge \nu (\nabla \wedge \mathbf{A}^*))d\Gamma + \int_{\Omega} j\sigma\omega\mathbf{A}^*\gamma d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{J}_s^*\gamma d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

Somando-se as duas integrais referentes a  $\Gamma_m$ , tem-se:

$$-\int_{\Gamma_m} \gamma_1(\mathbf{n}_1 \wedge \nu (\nabla \wedge \mathbf{A}^*))d\Gamma - \int_{\Gamma_m} \gamma_2(\mathbf{n}_2 \wedge \nu (\nabla \wedge \mathbf{A}^*))d\Gamma \quad (3.34)$$

Aplicando-se as condições de continuidade dos campos nas interfaces entre os materiais diferentes, as parcelas das integrais do lado esquerdo da equação (3.33), relativa as fronteira  $\Gamma_m$  desaparece.

Sabendo-se que em  $\Gamma_m$ ,  $n_1 = -n_2$ , as duas integrais da equação (3.34) se anulam. E também que:

$$\partial\Omega_1 - \Gamma_m \cup \partial\Omega_2 - \Gamma_m = \Gamma \quad (3.35)$$

Portanto, a equação (3.33) se reduz a:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{v} (\nabla \wedge \mathbf{A}^*) (\nabla \wedge \gamma) d\Omega - \int_{\partial\Gamma} \gamma (\mathbf{n} \wedge \mathbf{v} (\nabla \wedge \mathbf{A}^*)) d\Gamma \\ + \int_{\Omega} j\sigma\omega \mathbf{A}^* \gamma d\Omega - \int_{\Omega} \mathbf{J}_s^* \gamma d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.36)$$

Aplicando a condição de contorno de Neumann homogênea, equação (3.7), a componente tangencial do campo magnético é nula. Logo, manipulando a equação (3.36), tem-se:

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} (\nabla \wedge \mathbf{A}^*) (\nabla \wedge \gamma) d\Omega + \int_{\Omega} j\sigma\omega \mathbf{A}^* \gamma d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{J}_s^* \gamma d\Omega \quad (3.37)$$

A expressão acima é a forma fraca para o problema de correntes induzidas em 3D utilizando o potencial vetor magnético complexo

### 3.4.- O MÉTODO DE GALERKIN

A resposta para o problema, consiste em achar as funções  $\mathbf{A}$  para as quais a equação (3.41) é verificada. A função solução  $\mathbf{A}$  pertence a uma classe solução de dimensão infinita,  $\mathbf{H}$ . A função teste vetorial,  $\gamma$ , pertence a uma classe de dimensão infinita  $\mathbf{H}_0$ . A função teste vetorial  $\gamma$  e a função solução  $\mathbf{A}$  são linearmente independentes e por pertencerem a classes de funções infinitas; a procura da solução é extremamente difícil [Oden & Reddy, 1981, Mesquita, 1990]

O método de Galerkin consiste em procurar uma solução aproximada para uma classe de dimensão finita. Com isto, utilizando-se um número limitado,  $ned$ , de termos linearmente independentes, obtém-se uma aproximação  $A_n$  de  $A$ :

$$A_n \cong \sum_{i=1}^{ned} c_i w_i \quad (3.38)$$

onde  $w_i$  é a “função base vetorial” associada à aresta  $i$ ;  $c_i$ , são as constantes desconhecidas e  $ned$  é a dimensão do espaço solução, ligado ao número de arestas existentes no domínio.

### 3.5 - O MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

O método de Galerkin fornece uma elegante estratégia para a solução aproximada de problemas de contorno, porém possui um sério problema, não fornece uma maneira sistemática para construção das funções de base vetoriais  $w_i$ , tanto para função teste vetorial  $v$ .

Na aplicação deste método, primeiramente o domínio é dividido em sud-domínios discretizados, denominados elementos finitos. Em cada elemento são definidos pontos, chamados de nós ou pontos nodais, e arestas associadas a dois pontos ordenados sistematicamente. Desta forma as funções de base são geradas por funções simples. Para o elemento de aresta utilizado no presente trabalho, as funções são polinômios de primeira ordem, definidos elemento por elemento sobre a malha de elementos finitos.

Considerando-se a aproximação do potencial vetor magnético complexo no interior do elemento hexaédrico com oito nós e doze arestas, temos:

$$A^* = \sum_{n=1}^{12} A_n^* w_n \quad (3.39)$$

usando a aproximação adequada para o método de Galerkin:

$$\mathbf{v} = \mathbf{w}_m \quad (3.40)$$

Substituindo-se (3.39) e (3.40) em (3.37), tem-se:

$$\int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \left( \nabla \wedge \left( \sum_{n=1}^{12} \mathbf{w}_n \mathbf{A}_n^* \right) \right) (\nabla \wedge \mathbf{w}_m) d\Omega + \int_{\Omega} j\sigma\omega \left( \sum_{n=1}^{12} \mathbf{w}_n \mathbf{A}_n^* \right) \mathbf{w}_m d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{J}_s^* \cdot \mathbf{w}_m d\Omega \quad (3.41)$$

Sabendo-se que a velocidade angular é  $\omega = 2\pi f$ , e retirando a somatória para fora da integral, temos:

$$\sum_{n=1}^{12} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{w}_n \mathbf{A}_n^*) (\nabla \wedge \mathbf{w}_m) d\Omega + \sum_{n=1}^{12} \int_{\Omega} j2\pi f\sigma \mathbf{w}_n \mathbf{A}_n^* \mathbf{w}_m d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{J}_s^* \cdot \mathbf{w}_m d\Omega \quad (3.42)$$

A equação acima pode ser denotada sob a forma do seguinte sistema matricial:

$$[\mathbf{a}_{mn}][\mathbf{A}_n^*] + [\mathbf{b}_{mn}][\mathbf{A}_n^*] = [\mathbf{S}_m] \quad (3.43)$$

onde:

$$[\mathbf{a}_{mn}] = \sum_{n=1}^{12} \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot (\nabla \wedge \mathbf{w}_n) (\nabla \wedge \mathbf{w}_m) d\Omega$$

$$[\mathbf{b}_{mn}] = \sum_{n=1}^{12} \int_{\Omega} j2\pi f\sigma \mathbf{w}_n \mathbf{w}_m d\Omega$$

$$[\mathbf{S}_m] = \int_{\Omega} \mathbf{J}_s^* \cdot \mathbf{w}_m d\Omega$$

$[\mathbf{a}_{mn}]$  e  $[\mathbf{b}_{mn}]$  são as matrizes de contribuição com dimensão 12x12, que correspondem ao primeiro e segundo termo do lado esquerdo da equação(3.42);  $[\mathbf{A}_n^*]$  é a matriz coluna com dimensão 12x1, o qual correspondem aos valores incógnitos do potencial vetor magnético complexo;  $[\mathbf{S}_m]$  é a matriz coluna com dimensão 12x1, na qual são acondicionados os valores das fontes do problema.

Fazendo a condensação das matrizes, temos:

$$[a + jb]_{mm} [A^*]_m = [S]_m \quad (3.44)$$

O sistema (3.44) é relativo apenas a um elemento. Porém para o sistema global, as contribuições são calculadas por cada elemento e condensadas em um sistema matricial global onde todos os elementos da malha são considerados. Da mesma forma o sistema (3.44) foi implementada no software Feecc.

### **3.6 - CÁLCULO DA FORÇA EM 3D PARA PROBLEMA DE CORRENTES INDUZIDAS EM FORMULAÇÃO COMPLEXA UTILIZANDO O TENSOR DE MAXWELL**

O tensor de Maxwell é um dos tratamento mais eficazes para o cálculo de esforços sobre um corpo submetido à ação de campos magnéticos. O tensor de Maxwell permite a determinação de esforços em estrutura como o rotor de uma máquina elétrica e permite conhecer os valores das forças em peças móveis de dispositivos eletromagnéticos.

Ao aplicarmos o tensor de Maxwell para o cálculo de forças, é necessário que o campo magnético seja conhecido, o que faz com que o tensor de Maxwell seja atualmente o mais utilizado em sistemas computacionais de cálculo de campo.

O tensor de Maxwell nos permite, de maneira formal, compreender como a força depende em módulo e direção do campo magnético que a cria. Assim, através desta técnica, podemos verificar os resultados e todas condições necessárias para um bom funcionamento de dispositivos eletromagnéticos, evitando e localizando facilmente erros de projeto.

O tensor de Maxwell é dado por:

$$d\mathbf{F} = \frac{\mu_0}{2} H^2 d\mathbf{s} + \mu_0 (\mathbf{H} \bullet d\mathbf{s}) \mathbf{H} \quad (3.45)$$

onde:  $\mathbf{H}$  - Campo magnético;

$d\mathbf{s}$  - Vetor definindo a parcela elementar de superfície e perpendicular à mesma;

$d\mathbf{F}$  - Parcela da força relativa à superfície ou plano  $d\mathbf{s}$ .

Portanto, nesta parcela de superfície ou plano  $d\mathbf{s}$  considera-se que o campo magnético  $\mathbf{H}$  é constante em  $d\mathbf{s}$ . Definindo  $\mathbf{H}$ ,  $d\mathbf{s}$ ,  $d\mathbf{F}$  nas três coordenadas, temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= H_x \vec{i} + H_y \vec{j} + H_z \vec{k} \\ d\mathbf{s} &= d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k} \\ d\mathbf{F} &= dF_x \vec{i} + dF_y \vec{j} + dF_z \vec{k} \end{aligned} \quad (3.46)$$

Substituído as equações (3.46) em (3.45), temos:

$$\begin{aligned} d\mathbf{F} &= \frac{\mu_0}{2} (H_x \vec{i} + H_y \vec{j} + H_z \vec{k})^2 (d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k}) \\ &\quad + \mu_0 [(H_x \vec{i} + H_y \vec{j} + H_z \vec{k}) \bullet (d_x \vec{i} + d_y \vec{j} + d_z \vec{k})] (H_x \vec{i} + H_y \vec{j} + H_z \vec{k}) \end{aligned} \quad (3.47)$$

Logo, fazendo o produto escalar do 2º termo da equação (3.47) e separando as componentes x, y e z, temos:

$$dF_x = \frac{\mu_0}{2} [(H_x^2 - H_y^2 - H_z^2) d_x + 2H_x H_y d_y + 2H_x H_z d_z] \quad (3.48a)$$

$$dF_y = \frac{\mu_0}{2} [(H_y^2 - H_x^2 - H_z^2) d_y + 2H_x H_y d_x + 2H_y H_z d_z] \quad (3.48b)$$

$$dF_z = \frac{\mu_0}{2} [(H_z^2 - H_x^2 - H_y^2) d_z + 2H_x H_z d_x + 2H_y H_z d_y] \quad (3.48c)$$

Com as expressões acima aplicamos a formulação complexa, onde obtemos a forma exponencial para a aplicação do tensor de Maxwell. A formulação equivalente para as equações (3.48a), (3.48b) e (3.48c) expressas em termos de variáveis complexas é:

$$dF_x = \frac{\mu_0}{2} \left[ \Re^2(H_x e^{j\omega t}) - \Re^2(H_y e^{j\omega t}) - \Re^2(H_z e^{j\omega t}) \right] d_x + \Re(H_x e^{j\omega t}) \Re(H_y e^{j\omega t}) d_y + \Re(H_x e^{j\omega t}) \Re(H_z e^{j\omega t}) d_z \quad (3.49a)$$

$$dF_y = \frac{\mu_0}{2} \left[ \Re^2(H_y e^{j\omega t}) - \Re^2(H_x e^{j\omega t}) - \Re^2(H_z e^{j\omega t}) \right] d_y + \Re(H_x e^{j\omega t}) \Re(H_y e^{j\omega t}) d_x + \Re(H_y e^{j\omega t}) \Re(H_z e^{j\omega t}) d_z \quad (3.49b)$$

$$dF_z = \frac{\mu_0}{2} \left[ \Re^2(H_z e^{j\omega t}) - \Re^2(H_x e^{j\omega t}) - \Re^2(H_y e^{j\omega t}) \right] d_z + \Re(H_x e^{j\omega t}) \Re(H_z e^{j\omega t}) d_x + \Re(H_y e^{j\omega t}) \Re(H_z e^{j\omega t}) d_y \quad (3.49c)$$

onde,  $\Re(H_x e^{j\omega t})$  é a parte real de  $H_x e^{j\omega t}$  e  $H_x$ ,  $H_y$  e  $H_z$  são as componentes complexas dos campos. O termo ao quadrado que está entre parênteses nas equações, (3.49a), (3.49b) e (3.49c), podemos aplicar a propriedade distributiva para as componentes x, y e z:

$$a^2 - b^2 - c^2 = \left( \frac{a}{\sqrt{2}} + b \right) \left( \frac{a}{\sqrt{2}} - b \right) + \left( \frac{a}{\sqrt{2}} + c \right) \left( \frac{a}{\sqrt{2}} - c \right) \\ \Re^2(H_x e^{j\omega t}) - \Re^2(H_y e^{j\omega t}) - \Re^2(H_z e^{j\omega t}) = \Re \left( \frac{H_x}{\sqrt{2}} e^{j\omega t} + H_y e^{j\omega t} \right) \Re \left( \frac{H_x}{\sqrt{2}} e^{j\omega t} - H_y e^{j\omega t} \right) \\ + \Re \left( \frac{H_x}{\sqrt{2}} e^{j\omega t} + H_z e^{j\omega t} \right) \Re \left( \frac{H_x}{\sqrt{2}} e^{j\omega t} - H_z e^{j\omega t} \right) \quad (3.50)$$

Como os campos eletromagnéticos são constituídos de parte real e imaginária, a seguinte propriedade é válida para dois números complexos, sendo A e B e A\* e B\* seus conjugados, temos:



$$\Re(A) = \frac{1}{2}(A + A^*) \quad (AB)^* = A^*B^* \quad (3.51)$$

A expressão (3.51) nos fornece a parte real do número complexo e, aplicando na equação (3.50),

$$\begin{aligned} \Re^2(H_x e^{j\omega t}) - \Re^2(H_y e^{j\omega t}) - \Re^2(H_z e^{j\omega t}) = & \frac{1}{2} \Re \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{H_x}{\sqrt{2}} e^{j\omega t} + H_y e^{j\omega t} \right) \\ & \left( \frac{H_x}{\sqrt{2}} e^{j\omega t} - H_y e^{j\omega t} + \frac{H_x^*}{\sqrt{2}} e^{-j\omega t} - H_y^* e^{-j\omega t} \right) \end{aligned} \right] \\ & + \frac{1}{2} \Re \left[ \begin{aligned} & \left( \frac{H_x}{\sqrt{2}} e^{j\omega t} + H_z e^{j\omega t} \right) \\ & \left( \frac{H_x}{\sqrt{2}} e^{j\omega t} - H_z e^{j\omega t} + \frac{H_x^*}{\sqrt{2}} e^{-j\omega t} + H_z^* e^{-j\omega t} \right) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (3.52)$$

Fazendo as manipulações algébricas na equação (3.52)

$$\begin{aligned} \Re^2(H_x e^{j\omega t}) - \Re^2(H_y e^{j\omega t}) - \Re^2(H_z e^{j\omega t}) = & \frac{1}{2} \Re \left[ \begin{aligned} & (H_x H_x^* - H_y H_y^* - H_z H_z^*) + \\ & (H_x^2 - H_y^2 - H_z^2) e^{2j\omega t} + \\ & \left( H_y \frac{H_x^*}{\sqrt{2}} + H_z \frac{H_x^*}{\sqrt{2}} - \frac{H_x}{\sqrt{2}} H_y^* - \frac{H_x}{\sqrt{2}} H_z^* \right) \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (3.53)$$

Notando que o último termo do lado direito da equação (3.53) é imaginário, e assim podemos cancelar este termo pois já que estamos trabalhando somente com a parte real não é necessário que ele apareça em nossa formulação por enquanto:

$$\Re^2(H_x e^{j\omega t}) - \Re^2(H_y e^{j\omega t}) - \Re^2(H_z e^{j\omega t}) = \frac{1}{2} \Re \left[ \begin{aligned} & (H_x H_x^* - H_y H_y^* - H_z H_z^*) + \\ & (H_x^2 - H_y^2 - H_z^2) e^{2j\omega t} \end{aligned} \right] \quad (3.54)$$

ou:

$$\Re^2(H_x e^{j\omega t}) - \Re^2(H_y e^{j\omega t}) - \Re^2(H_z e^{j\omega t}) = \frac{1}{2} \left[ \begin{aligned} & |H_x|^2 - |H_y|^2 - |H_z|^2 + \\ & \Re(H_x^2 - H_y^2 - H_z^2) e^{2j\omega t} \end{aligned} \right] \quad (3.55)$$

Onde  $|H_x|$ , corresponde ao módulo do campo eletromagnético.

A segunda parte da equação (3.49a) é feita de maneira similar

$$\begin{aligned} \Re(H_x e^{j\omega t}) \Re(H_y e^{j\omega t}) + \Re(H_x e^{j\omega t}) \Re(H_z e^{j\omega t}) &= \frac{1}{2} \Re \left[ \begin{aligned} &(H_x e^{j\omega t})(H_y e^{j\omega t} + H_y^* e^{-j\omega t}) + \\ &(H_x e^{j\omega t})(H_z e^{j\omega t} + H_z^* e^{-j\omega t}) \end{aligned} \right] \\ \Re(H_x e^{j\omega t}) \Re(H_y e^{j\omega t}) + \Re(H_x e^{j\omega t}) \Re(H_z e^{j\omega t}) &= \frac{1}{2} \Re \left[ \begin{aligned} &(H_x H_y^* + H_x H_z^*) + \\ &(H_x H_y + H_x H_z) e^{2j\omega t} \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (3.56)$$

Denotando as partes reais e imaginárias de  $H_x$  como  $h_{xr}$  e  $h_{xi}$  e as partes reais e imaginárias de  $H_y$ , como  $h_{yr}$  e  $h_{yi}$  e as partes reais e imaginárias  $H_z$  como  $h_{zr}$  e  $h_{zi}$  respectivamente, nos temos, da equação (3.55)

$$|H_x|^2 - |H_y|^2 - |H_z|^2 = |(h_{xr} + jh_{xi})|^2 - |(h_{yr} + jh_{yi})|^2 - |(h_{zr} + jh_{zi})|^2$$

Expandindo os termos do lado esquerdo da equação acima

$$\begin{aligned} |H_x|^2 - |H_y|^2 - |H_z|^2 &= [(h_{xr}^2 + h_{xi}^2)^{1/2}]^2 - [(h_{yr}^2 + h_{yi}^2)^{1/2}]^2 - [(h_{zr}^2 + h_{zi}^2)^{1/2}]^2 \\ |H_x|^2 - |H_y|^2 - |H_z|^2 &= h_{xr}^2 + h_{xi}^2 - h_{yr}^2 - h_{yi}^2 - h_{zr}^2 - h_{zi}^2 \end{aligned} \quad (3.57)$$

e

$$\Re(H_x^2 - H_y^2 - H_z^2) = (h_{xr} + jh_{xi})^2 - (h_{yr} + jh_{yi})^2 - (h_{zr} + jh_{zi})^2$$

Expandindo os termos da equação acima

$$\Re(H_x^2 - H_y^2 - H_z^2) = (h_{xr}^2 + 2jh_{xr}h_{xi} - h_{xi}^2) - (h_{yr}^2 + 2jh_{yr}h_{yi} - h_{yi}^2) - (h_{zr}^2 + 2jh_{zr}h_{zi} - h_{zi}^2)$$

Como nos interessa somente a parte real da expressão

$$\Re(H_x^2 - H_y^2 - H_z^2) = h_{xr}^2 - h_{xi}^2 - h_{yr}^2 + h_{yi}^2 - h_{zr}^2 + h_{zi}^2 \quad (3.58)$$

Similarmente para a equação (3.56)

$$\Re(H_x H_y^* + H_x H_z^*) = (h_{xr} + jh_{xi})(h_{yr} - jh_{yi}) + (h_{xr} + jh_{xi})(h_{zr} - jh_{zi})$$

$$\Re(H_x H_y^* + H_x H_z^*) = h_{xr} h_{yr} - j h_{xr} h_{yi} + j h_{xi} h_{yr} + h_{xi} h_{yi} + h_{xr} h_{zr} - j h_{xr} h_{zi} + j h_{xi} h_{zr} + h_{xi} h_{zi}$$

$$\Re(H_x H_y^* + H_x H_z^*) = h_{xr} h_{yr} + h_{xr} h_{zr} + h_{xi} h_{yi} + h_{xi} h_{zi} + j(h_{xi} h_{yr} + h_{xi} h_{zr} - h_{xr} h_{yi} - h_{xr} h_{zi})$$

Obtendo somente a parte real

$$\Re(H_x H_y^* + H_x H_z^*) = h_{xr} h_{yr} + h_{xr} h_{zr} + h_{xi} h_{yi} + h_{xi} h_{zi} \quad (3.59)$$

e

$$\Re(H_x H_y + H_x H_z) = (h_{xr} + j h_{xi})(h_{yr} + j h_{yi}) + (h_{xr} + j h_{xi})(h_{zr} + j h_{zi})$$

$$\Re(H_x H_y + H_x H_z) = h_{xr} h_{yr} + j h_{xr} h_{yi} + j h_{xi} h_{yr} - h_{xi} h_{yi} + h_{xr} h_{zr} + j h_{xr} h_{zi} + j h_{xi} h_{zr} - h_{xi} h_{zi}$$

Obtendo somente a parte real

$$\Re(H_x H_y + H_x H_z) = h_{xr} h_{yr} + h_{xr} h_{zr} - h_{xi} h_{yi} - h_{xi} h_{zi} \quad (3.60)$$

Rescrevendo as equações (3.55) e (3.56) através das expressões (3.57), (3.58), (3.59) e (3.60) obtemos a seguinte expressão para a força:

$$dF_x = \frac{\mu_0}{4} \left\{ \left[ \left( h_{xr}^2 + h_{xi}^2 - h_{yr}^2 - h_{yi}^2 - h_{zr}^2 - h_{zi}^2 \right) + 2 \left( h_{xr}^2 - h_{xi}^2 - h_{yr}^2 + h_{yi}^2 - h_{zr}^2 + h_{zi}^2 \right) e^{2j\alpha} \right] dx \right. \\ \left. + 2 \left[ \left( h_{xr} h_{yr} + h_{xi} h_{yi} \right) + \left( h_{xr} h_{yr} - h_{xi} h_{yi} \right) e^{2j\alpha} \right] dy \right. \\ \left. + 2 \left[ \left( h_{xr} h_{zr} + h_{xi} h_{zi} \right) + \left( h_{xr} h_{zr} - h_{xi} h_{zi} \right) e^{2j\alpha} \right] dz \right\} \quad (3.61a)$$

De maneira análoga e pode ser calculada para  $dF_y$  e  $dF_z$ .

$$dF_y = \frac{\mu_0}{4} \left\{ \left[ \left( h_{yr}^2 + h_{yi}^2 - h_{xr}^2 - h_{xi}^2 - h_{zr}^2 - h_{zi}^2 \right) + 2 \left( h_{yr}^2 - h_{yi}^2 - h_{xr}^2 + h_{xi}^2 - h_{zr}^2 + h_{zi}^2 \right) e^{2j\alpha} \right] dy \right. \\ \left. + 2 \left[ \left( h_{xr} h_{yr} + h_{xi} h_{yi} \right) + \left( h_{xr} h_{yr} - h_{xi} h_{yi} \right) e^{2j\alpha} \right] dx \right. \\ \left. + 2 \left[ \left( h_{yr} h_{zr} + h_{yi} h_{zi} \right) + \left( h_{yr} h_{zr} - h_{yi} h_{zi} \right) e^{2j\alpha} \right] dz \right\} \quad (3.61b)$$

$$dF_z = \frac{\mu_0}{4} \left\{ \left[ \left( h_{zr}^2 + h_{zi}^2 - h_{xr}^2 - h_{xi}^2 - h_{yr}^2 - h_{yi}^2 \right) + 2 \left( h_{zr}^2 - h_{zi}^2 - h_{xr}^2 + h_{xi}^2 - h_{yr}^2 + h_{yi}^2 \right) e^{2j\alpha} \right] dz \right. \\ \left. + 2 \left[ \left( h_{xr} h_{zr} + h_{xi} h_{zi} \right) + \left( h_{xr} h_{zr} - h_{xi} h_{zi} \right) e^{2j\alpha} \right] dx \right. \\ \left. + 2 \left[ \left( h_{yr} h_{zr} + h_{yi} h_{zi} \right) + \left( h_{yr} h_{zr} - h_{yi} h_{zi} \right) e^{2j\alpha} \right] dy \right\} \quad (3.61c)$$

A equações (3.61) podem ser divididas em duas partes:

1ª Componente contínua dc;

2ª Termos dependente de frequência (frequência é  $2\omega$ ).

Para o plano paralelo  $Oyz$ ,  $ds = \pm \vec{i}$ , a força em  $x$  é obtida da seguinte forma:

$$dF_x = dF_{x1} + dF_{x2}$$

$\Rightarrow$  Componente contínua dc

$$dF_{x1} = \frac{\mu_0}{4} \left[ \left( h_{xr}^2 + h_{xi}^2 - h_{yr}^2 - h_{yi}^2 - h_{zr}^2 - h_{zi}^2 \right) dx + 2 \left( h_{xr} h_{yr} + h_{xi} h_{yi} \right) dy + 2 \left( h_{xr} h_{zr} + h_{xi} h_{zi} \right) dz \right] \quad (3.62a)$$

$\Rightarrow$  Termos que dependem da frequência

$$dF_{x2} = \frac{\mu_0}{4} \left[ \left( h_{xr}^2 - h_{xi}^2 - h_{yr}^2 + h_{yi}^2 - h_{zr}^2 + h_{zi}^2 \right) dx + 2 \left( h_{xr} h_{yr} - h_{xi} h_{yi} \right) dy + 2 \left( h_{xr} h_{zr} - h_{xi} h_{zi} \right) dz \right] \quad (3.62b)$$

$\Rightarrow$  Componente imaginária

$$df_{ximag} = \frac{\mu_0}{2} \left[ \left( h_{xr} h_{xi} - h_{yr} h_{yi} - h_{zr} h_{zi} \right) dx + \left( h_{xr} h_{yi} + h_{yr} h_{xi} \right) dy + \left( h_{xr} h_{zi} + h_{zr} h_{xi} \right) dz \right] \quad (3.62c)$$

Para o plano paralelo  $Oxz$ ,  $ds = \pm \vec{j}$ , a força em  $y$  é obtida da seguinte forma:

$\Rightarrow$  Componente contínua dc

$$dF_{y1} = \frac{\mu_0}{4} \left[ \left( h_{yr}^2 + h_{yi}^2 - h_{xr}^2 - h_{xi}^2 - h_{zr}^2 - h_{zi}^2 \right) dy + 2 \left( h_{xr} h_{yr} + h_{xi} h_{yi} \right) dx + 2 \left( h_{yr} h_{zr} + h_{yi} h_{zi} \right) dz \right] \quad (3.63a)$$

⇒ Termos que dependem da frequência

$$dF_{y2} = \frac{\mu_0}{4} \left[ (h_{yr}^2 - h_{yi}^2 - h_{xr}^2 + h_{xi}^2 - h_{zr}^2 + h_{zi}^2) dy + 2(h_{xr}h_{yr} - h_{xi}h_{yi}) dx + 2(h_{yr}h_{zr} - h_{yi}h_{zi}) dz \right] \quad (3.63b)$$

⇒ Componente imaginária

$$df_{yimag} = \frac{\mu_0}{2} \left[ (h_{yr}h_{yi} - h_{xr}h_{xi} - h_{zr}h_{zi}) dy + (h_{xr}h_{yi} + h_{yr}h_{xi}) dx + (h_{zr}h_{yi} + h_{yr}h_{zi}) dz \right] \quad (3.63c)$$

Para o plano paralelo 0xy,  $ds = \pm \vec{k}$ , obtemos a força em z

⇒ Componente contínua dc

$$dF_{z1} = \frac{\mu_0}{4} \left[ (h_{zr}^2 + h_{zi}^2 - h_{xr}^2 - h_{xi}^2 - h_{yr}^2 - h_{yi}^2) dz + 2(h_{xr}h_{zr} + h_{xi}h_{zi}) dx + 2(h_{yr}h_{zr} + h_{yi}h_{zi}) dy \right] \quad (3.64a)$$

⇒ Termos que dependem da frequência

$$dF_{z2} = \frac{\mu_0}{4} \left[ (h_{zr}^2 - h_{zi}^2 - h_{xr}^2 + h_{xi}^2 - h_{yr}^2 + h_{yi}^2) dz + 2(h_{xr}h_{zr} - h_{xi}h_{zi}) dx + 2(h_{yr}h_{zr} - h_{yi}h_{zi}) dy \right] \quad (3.64b)$$

⇒ Componente imaginária

$$df_{zimag} = \frac{\mu_0}{2} \left[ (h_{zr}h_{zi} - h_{xr}h_{xi} - h_{yr}h_{yi}) dz + (h_{xr}h_{zi} + h_{zr}h_{xi}) dx + (h_{yr}h_{zi} + h_{zr}h_{yi}) dy \right] \quad (3.64c)$$

As expressões (3.62), (3.63) e (3.64) mostra que, usando a formulação nós obtemos uma componente contínua da força a qual será sobreposto a uma outra componente variável com frequência dupla em relação à da fonte.

A força total sobre o corpo é obtida somando-se vetorialmente a componente contínua dc com os termos que dependem da frequência. A componente imaginária nos fornece o valor da força com o defasamento de  $90^\circ$  em relação à componente real.

### 3.7 - CONCLUSÃO

Neste capítulo, foram apresentadas a modelagem matemática do potencial vetor magnético com variáveis complexas juntamente com a formulação dos elementos de aresta. Abordamos também o cálculo da força magnética em 3D utilizando o tensor de Maxwell para as variáveis complexas.

## **CAPÍTULO IV**

### **COMPARAÇÕES E APLICAÇÕES**

#### **4.1 - INTRODUÇÃO**

Neste capítulo serão apresentados os resultados obtidos com o software “Feecc” (Finite Edge Element Complex Current) utilizando a formulação apresentada no capítulo 3.

Os resultados serão comparados com outros softwares já validados. Primeiramente se faz a validação do cálculo de força em 3D, e em seguida uma análise em um contator fabricado pela Telemecanique.

#### **4.2- COMPARAÇÃO DAS FORÇAS ENTRE FEECC COM EFCAD-2D**

Para a validação da metodologia apresentada e dos procedimentos implementados dentro do ambiente informático do software FEECAD( Finite Edge Element Computer Aided Design)[Bastos. Et. All., 1994], optou-se por um exemplo simples, apresentado na Fig. 4.1, mas que justifique o procedimento adotado. Trata-se de um eletroímã linear de secção quadrada com o entreferro muito menor que o seu comprimento (cerca de 5 vezes menor) para que se possa fazer este tipo de comparação em 2D. Simulou-se o mesmo caso no sistema Efcad-2D, Fig. 4.2 no programa Efcc (Eletromagnetic Field Complex Current) para que fossem confrontadas as diferentes formulações, através do cálculo de forças magnéticas 3D com 2D, utilizando o tensor de Maxwell, conforme apresentado no capítulo 3.

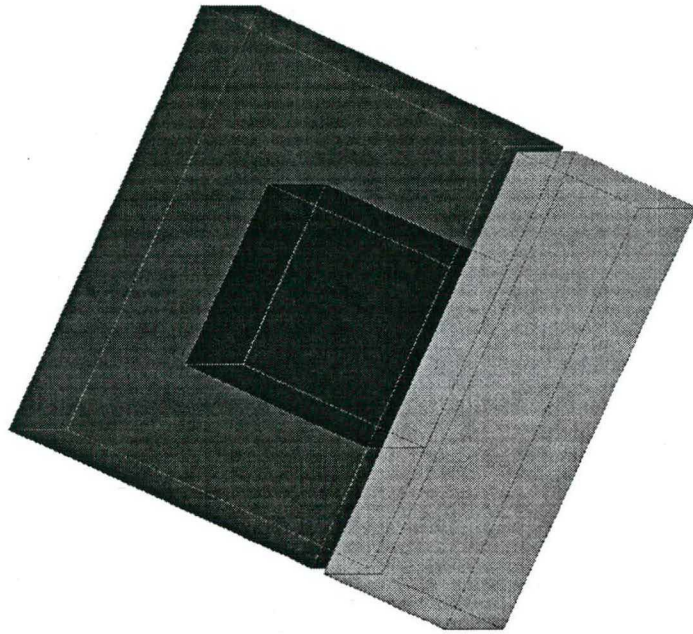


Fig. 4.1 - Dispositivo Eletromagnético Simulado.

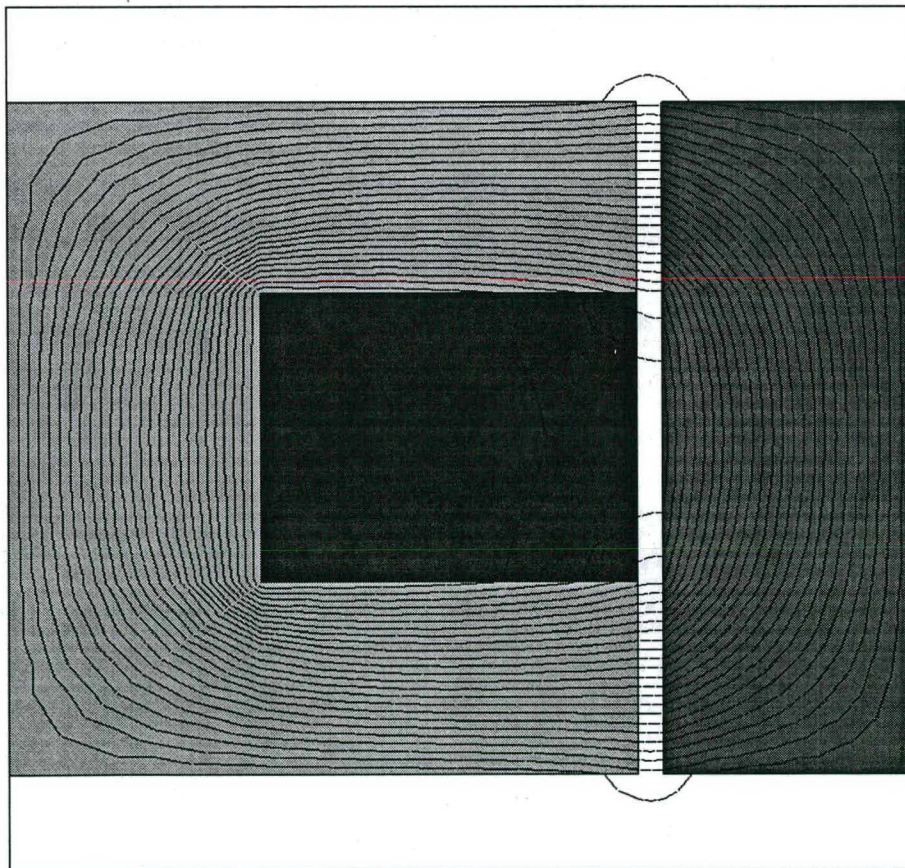


Fig. 4.2 - Estrutura Calculada no Efcad-2D.



Nas figuras 4.3 e 4.4 são apresentadas as distribuições dos campos eletromagnéticos no dispositivo calculado no sistema Feec com a frequência de 0 Hz e 60 Hz, e densidade de corrente igual a  $5 \text{ A/mm}^2$ . A permeabilidade relativa do ferro é 1.000.

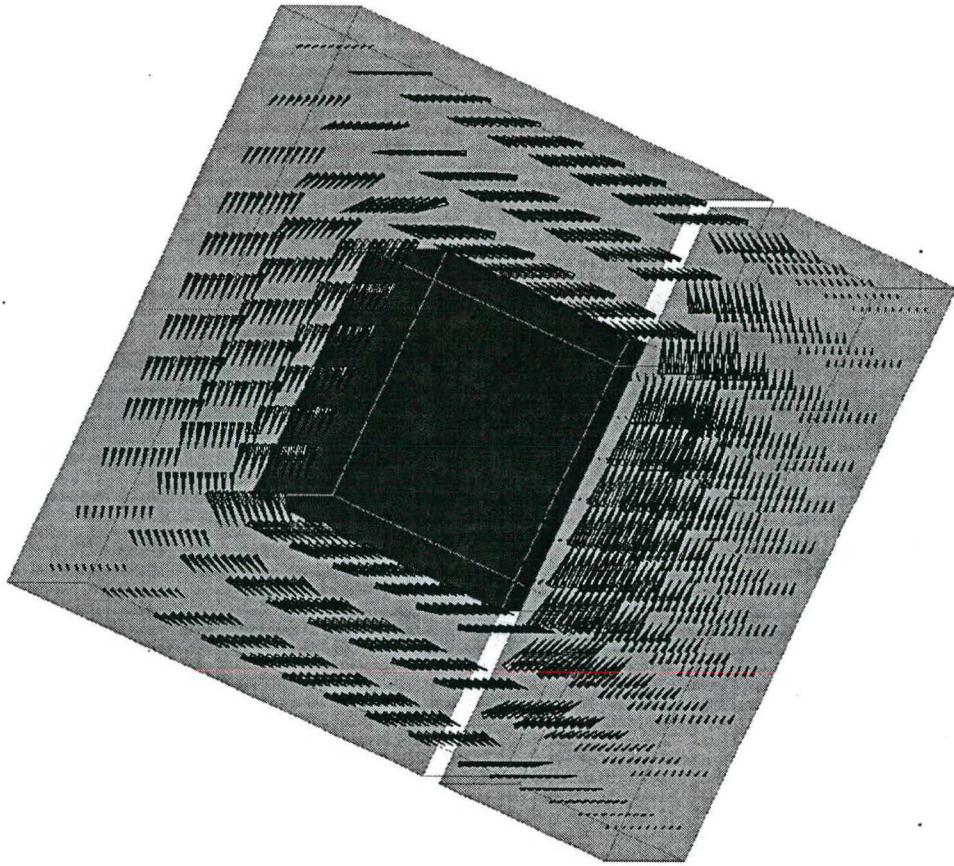


Fig. 4.3 - Distribuição do Campo Magnético com frequência de 0 HZ

A peça móvel do eletroímã tem permeabilidade de 1,0 e condutividade elétrica de  $1 \times 10^7 \text{ (1/}\Omega\cdot\text{m)}$ .



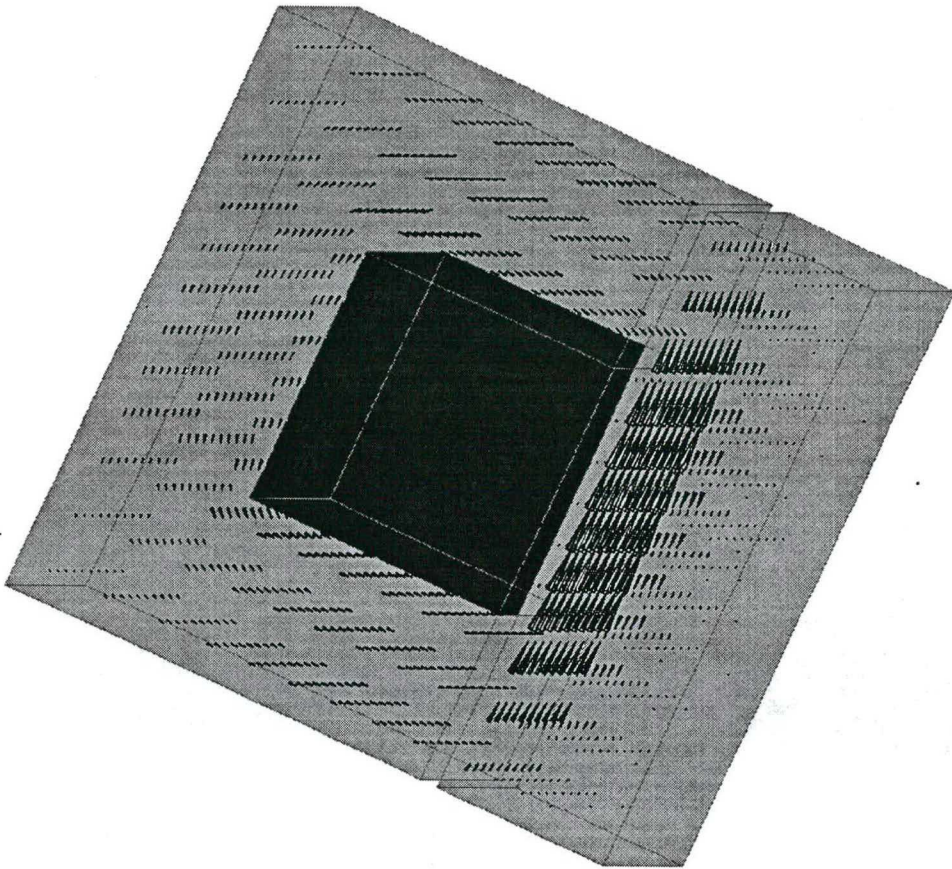


Fig. 4.4 - Distribuição do Campo Magnético com Frequência de 60 Hz

A malha do elemento finito para a geometria da fig. 4.1 tem 2.880 elementos, 3.553 nós, 9.940 arestas, 7.428 incógnitas e 111.989 termos matriciais. O tempo de processamento para a formação matricial para  $f = 0$  Hz (com 433 iterações no ICCG) é de 4:05 minutos e com  $f = 60$  Hz (com 242 iterações no ICCG) é de 2:19 minutos em um micro computador Pentium 133 Mhz.

Comparando as forças no entreferro dos dois dispositivos, temos

Para Frequência de 0 Hz

Direção X	Feecad	Efcad	Erro (%)
Módulo da força	$1,457 \times 10^3 \text{ N}$	$1,488 \times 10^3 \text{ N}$	2,13
Frequência	0 Hz	0 Hz	0,00

Para Frequência de 60 Hz

Direção X	Feecad	Efcad	Erro (%)
Módulo da força	$6,140 \times 10^3 \text{ N}$	$6,164 \times 10^3 \text{ N}$	0,39
Frequência	120 Hz	120 Hz	0,00

Com o erro variando de 0,4% à 2%, a utilização da formulação do capítulo 3 para o cálculo da força é plenamente satisfatória.

#### 4.3 - CONTATOR ELETROMAGNÉTICO

Este exemplo trata a análise do contator eletromagnético fabricado pela Telemecanique, cuja simetria da estrutura nos permiti apresentar somente  $\frac{1}{4}$  do dispositivo na fig. 4.5. Os dados fornecidos pelo fabricante com os diversos ensaios realizados, fornecendo valores de forças conforme a relação entreferro/corrente estão na tabela 4.1

Entreferro (mm)	6	5	4	3	2	1,5	1,0	0,5
NI (AE)	1.083	1.050	1.007	945	844	760	646	480
F medida (N)	2,78	3,78	5,17	7,2	11	14,1	18,8	27

Tabela 4.1 - Tabela Fornecida Pelo Fabricante

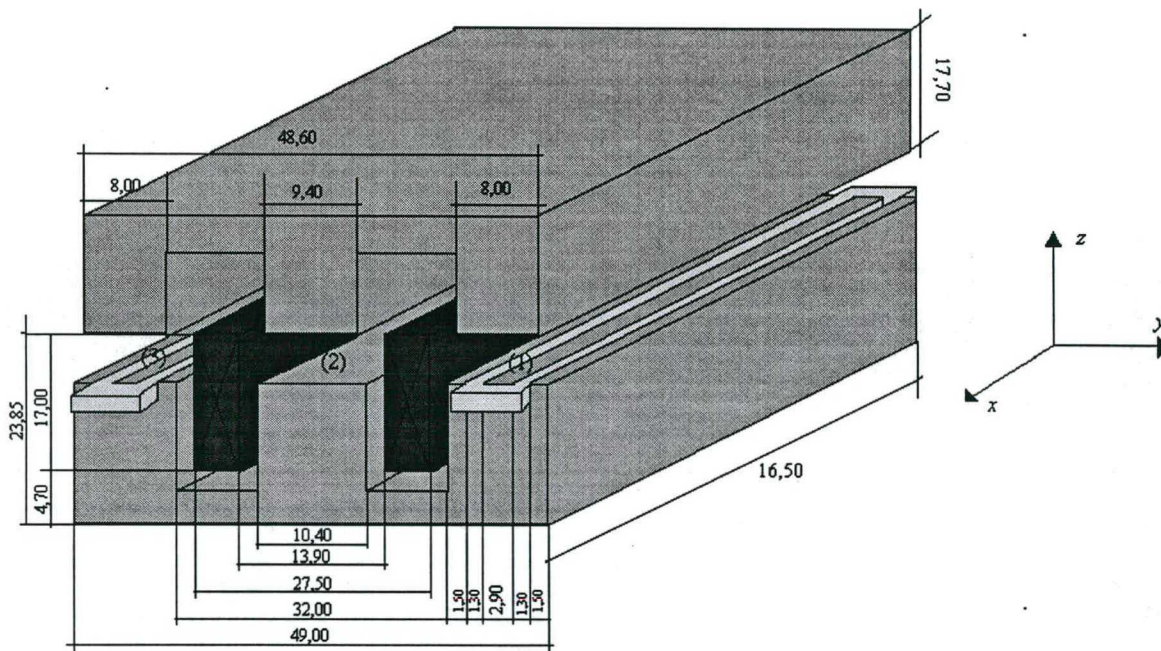


Fig. 4.5 - Dispositivo Eletromagnético Simulado

A malha do elementos finitos hexaédricos possui 2.400 elementos, 3.024 nós, 8.403 arestas, 6.083 incógnitas e 90.324 termos matriciais. O tempo de processamento para  $F = 0$  Hz (com 206 iterações no ICCG) é de 2:11 minutos, para a  $F = 60$  Hz (com 161 iterações no ICCG) é de 1:33 minutos.



### 4.3.1 - CÁLCULO ANALÍTICO

Apresentaremos a resolução teórica do circuito magnético para  $f = 0$  Hz utilizando a estrutura da figura 4.5, calculando  $\frac{1}{2}$  da estrutura com entreferro de 2 mm,  $NI = 844$  Ae,  $S_1 = 5,2$  mm e  $S_2 = 8,5$  mm.

Circulação do campo:

$$\begin{aligned}H_1 e + H_2 e &= NI \\2H_1 + 2H_2 &= 844 \\H_1 + H_2 &= 422\end{aligned}$$

Conservação do campo:

$$\begin{aligned}\phi_1 &= \phi_2 \\ \mu_0 H_1 S_1 &= 2\mu_0 H_2 1,50 + \mu_0 H_2 2,90 \\ H_1 &= 1,1346 H_2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}H_1 &= 197.693,69 \quad \text{A/m} \\ H_2 &= 224.303,26 \quad \text{A/m}\end{aligned}$$

Aplicando o tensor de Maxwell, temos:

$$\begin{aligned}F_1 &= \frac{\mu_0}{2} H_1^2 S_1 = \frac{\mu_0}{2} (197.693,69)^2 5,2 \times 10^{-3} = 127,69 \quad \text{N / m} \\ F_2 &= \frac{\mu_0}{2} H_2^2 S_2 = \frac{\mu_0}{2} (224.303,26)^2 8,5 \times 10^{-3} = 268,70 \quad \text{N / m} \\ F_t &= F_1 + F_2 = 396,39 \quad \text{N / m}\end{aligned}$$

como o comprimento é de 16,50 mm, obtém-se finalmente:

$$F_t = 396,39 \times 0,0165 = 6,54 \quad \text{N}$$

que é a metade da força total exercida no entreferro de 2 mm.

### 4.3.2 - RESULTADOS DO PROGRAMA FEECC

Nas figuras 4.6, 4.7 e 4.8 apresentamos a distribuição dos campos magnéticos em  $\frac{1}{4}$  da estrutura, onde para este exemplo utilizamos um entreferro de 2 mm,  $NI = 844$  Ae,  $J = 7,3$  A/mm<sup>2</sup> e permeabilidade relativa do ferro de 1.000 em relação ao ar.

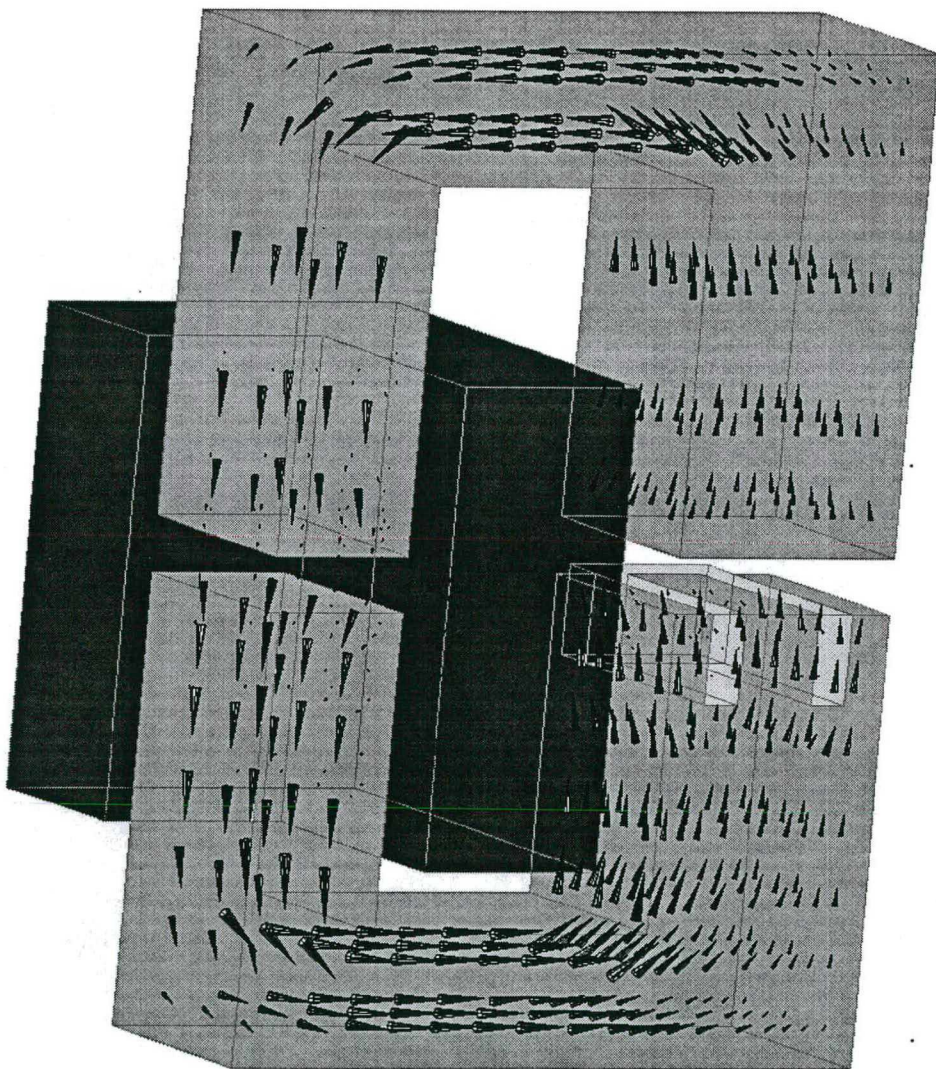


Fig. 4.6 - Representação de  $\frac{1}{4}$  do contator para  $f = 0$  Hz



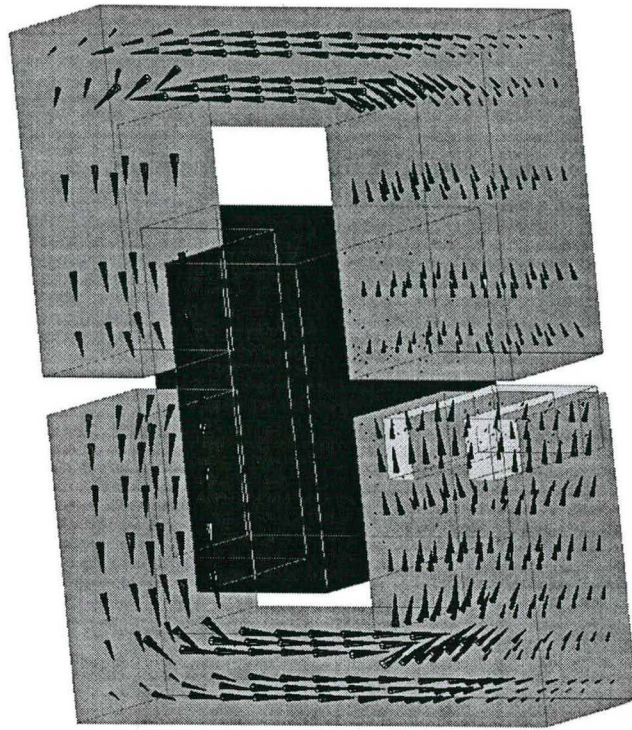


Fig. 4.7 - Distribuição do Campo Magnético para  $f = 60$  Hz

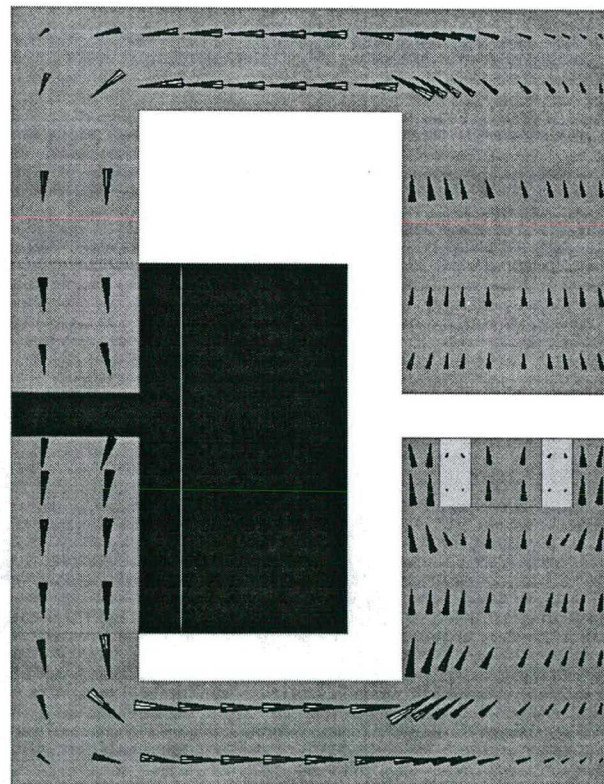


Fig. 4.8 - Distribuição do Campo Magnético no Plano OYZ

Para este caso, temos um anel de curto circuito de cobre nas barras laterais do dispositivo, este anel, com permeabilidade relativa de 1,0 e condutividade elétrica de  $1 \times 10^7$  ( $1/\Omega.m$ ). A finalidade deste anel é de não deixar que a parte móvel não oscile sobre a parte fixa do contator, isto é, que a força magnética média seja maior que zero. Apresentamos somente o anel de curto circuito para um melhor visualização.

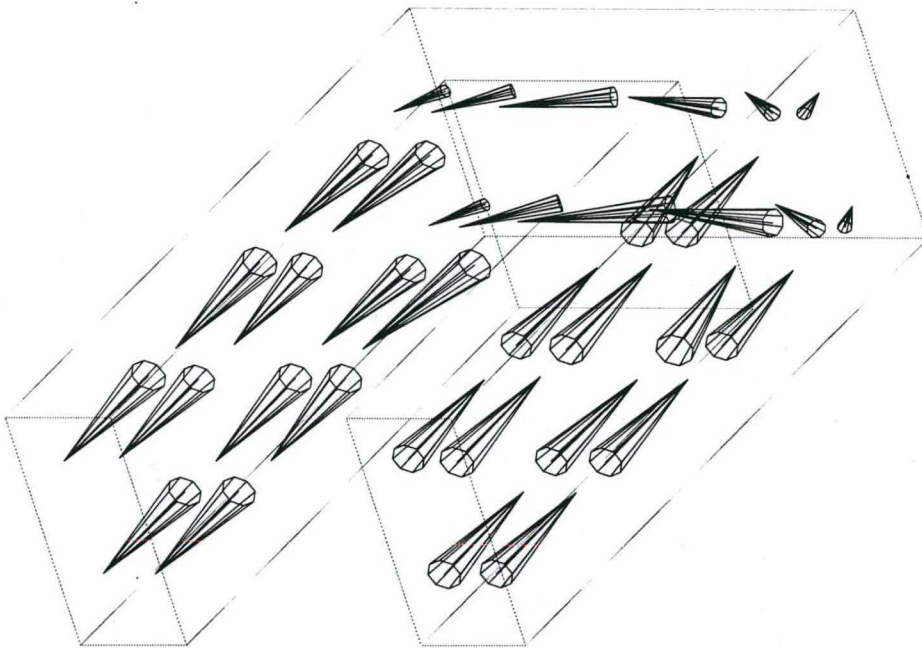


Fig. 4.9 - Representação da Corrente Induzida no Anel de Curto Circuito

Na tabela 4.2, comparamos os resultados obtidos para o cálculo da força realizada no software “Fecc”, considerando a frequência igual à zero. Compara-se também, os valores obtidos com software Evis[Garcia, 1995] e também com os valores teóricos.

Entreferro	(mm)	2
Densidade de corrente J	(A/mm <sup>2</sup> )	7,3
Força Medida	(N)	11,00
Módulo da Força Fecc	(N)	11,432
Módulo da Força Efvis	(N)	11,0017
Módulo da Força Efcad-2D	(N)	10,51
Força Analítica	(N)	12,31
Erro Medido*		3,92 %
Erro Analítico**		7,68 %

Tabela 4.2 - Comparação dos Valores com FEECC

\* O cálculo do erro corresponde aos valores obtidos pelo Fecc quando comparados com os valores medidos pelo fabricante.

\*\* O cálculo da força analítica, corresponde à resolução do circuito magnético demonstrado no item 4.3.1.

O cálculo da força realizado pelo Fecc no contator, apresentou um resultado satisfatório quando comparado com o cálculo analítico e com os valores fornecidos pelo fabricante.

#### 4.4 - CONCLUSÃO

Neste capítulo foram apresentados as comparações entre os valores das forças calculadas para duas e três dimensões, pelo Efcc e pelo Fecc, respectivamente. Para esta primeira comparação utilizamos um eletroímã onde obtemos uma excelente concordância entre os cálculos. A utilização de um



entreferro muito pequeno em relação ao comprimento do dispositivo o que viabiliza comparação em 2D, visto que os efeitos de espraçamento ficam minimizados.

Em outro exemplo, foi apresentado um problema real, com contator de 9 A e simulado  $\frac{1}{4}$  da sua estrutura devido a simetria, onde podemos verificar e comparar os valores obtidos no software Fecc com os valores medidos, analíticos e calculados por outros softwares. A concordância de resultados é muito boa.

## **CONCLUSÃO GERAL**

No decorrer deste trabalho foi apresentado o métodos finitos de aresta com elementos hexaédricos para a modelagem das correntes induzidas em regime linear e senoidal.

Fez-se um estudo teórico dos elementos de aresta e do sistema Feecad-3D e propôs-se uma formulação em frequência para verificar o efeito da penetração de campos eletromagnéticos, a indução magnética pontual e as forças magnéticas.

Inicialmente, apresentou-se no capítulo I alguns conceitos fundamentais do eletromagnetismo e a formulação do potencial vetor magnético com variáveis complexas.

No capítulo II, apresentou-se os conceitos e as formulações dos elementos de aresta, bem como todas as dificuldades e compromissos que envolve os cálculos tridimensionais. Apresentou-se também algumas vantagens do elemento de aresta sobre o elemento nodal.

No capítulo III, apresentou-se a modelagem matemática para o problema de potencial vetor magnético complexas usando o método de elementos de aresta, bem como a formulação forte, a formulação fraca e a discretização do domínio pelo método de elementos finitos. Uma outra abordagem foi o cálculo da força magnética em 3D utilizando o tensor de Maxwell para as variáveis complexas.

Finalmente, para a validação do sistema, no capítulo IV foram apresentados alguns resultados obtidos com o uso do Feecc.

Os valores numéricos obtidos utilizando este sistema para problemas magnetostático foram bastante satisfatório quando comparado a valores medidos ou a valores calculados analiticamente.

Analisando-se o trabalho de forma geral, pode-se concluir que o desenvolvimento deste sistema numérico contribui para a análise eletromagnética. Portanto, mais uma ferramenta do sistema Feecad para o cálculo em 3D.

## **REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICAS**

- [1] BASTOS, J. P. A.; Eletromagnetismo e Cálculo de Campos. Editora da UFSC, 2ª Edição, Florianópolis, 1.992.
- [2] BASTOS, J. P. A., IDA, N.; Electromagnetics and Calculation of Fields. Springer-Verlag. New York, 1.992.
- [3] BASTOS, J. P. A.; Apostila da Disciplina de Tópicos Especiais em Eletromagnetismo. Curso de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica, Florianópolis, 1.995.
- [4] BOSSAVIT, A.; Whitney Forms: A Class of Finite Elements for Three Dimensional Computations in Electromagnetism. IEEE Proceedings, Vol. 35, Nº 8, pp 493-499, 1.988.
- [5] BOSSAVIT, A.; Edge-Element Computation of The Force Field in Deformable Bodies. IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 28, Nº 2, pp 1263-1266, 1.992.
- [6] BOSSAVIT, A.; A Rationale for "Edge-Elements in 3D Fields Computations. IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 24, Nº 1, 1.988.
- [7] GOLIAS, N. A., TSIBONKS, T. D.; Magnetostatics with Edge Elements: A Numerical Investigation in the Choice of the Tree. IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 30, Nº 5, pp 2.877-2.880, 1.994.
- [8] GERRIT, M.; Edge Elements, Their Advantage and Their Disadvantages., IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 30, Nº 5, pp 3.352-3.357, 1.994.
- [9] GARCIA, F. L. S.; Contribuição à Elaboração de um Visualizador de Campos Eletromagnéticos Tridimensionais. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica), UFSC, Florianópolis, 1.992.

- [10] IOON, D., HANTILA, F., GHEORMA, I.; A Study on the Combined use of Edge and Nodal Elements. Proceedings of the Seventy Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation, pp 177, 1.996.
- [11] KAMEARI, A.; Convergence of ICCG Method in FEM Using Edge Elements Without Gauge Condition. Proceedings of the Seventy Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation, pp 298, 1.996.
- [12] KAWASE, Y., MIYATANI, O., YAMAGUCHI, T.; Numerical Analysis of Dynamic Characteristics of Electromagnets Using 3D Finite Element Method with Edge Elements. IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 30, N° 5, pp 3.248-3.251, 1.994.
- [13] PINHO, A. C.; Simulação de Dispositivos Eletromagnéticos Pela Resolução Simultânea das Equações do Campo Elétrico em 3D com as Equações dos Circuitos de Alimentação. Projeto de Tese de Doutorado, Florianópolis, Setembro, 1.996.
- [14] WEBB, J. P., FORGHANI, B.; A Scalar-Vector Method for 3D Eddy Current Problems Using Edge Elements. IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 20, N° 6, 1.989.
- [15] WEBB, J. P.; Edge Elements and What They Do For You. IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 20, N° 2, pp 1.460-1.465, 1.993.
- [16] YU, H. T., SHAO, K. R., LI, L.; Edge-Nodal Coupled Methods for Computing 3D Eddy Current Problems. Proceedings of the Seventy Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation, pp 435, 1.996.